

Marie Farge, 1990

Transformée en ondelettes continues
et application à la turbulence

*Journée Annuelle de la Société de Mathématique de France,
Paris, 5 Mai 1990, 17-62*

Transformée en ondelettes continue et application à la turbulence

Marie Farge

LMD-CNRS
Ecole Normale Supérieure
24, rue Lhomond
75231 Paris Cedex 5

'In the last decade we have experienced a conceptual shift in our view of turbulence. For flows with strong velocity shear... or other organizing characteristics, many now feel that the spectral description has inhibited fundamental progress. The next "El Dorado" lies in the mathematical understanding of coherent structures in weakly dissipative fluids: the formation, evolution and interaction of metastable vortex-like solutions of nonlinear partial differential equations...'

Norman Zabusky /1984/

Introduction

Dans cet article, j'ai choisi d'exposer un point de vue personnel concernant l'état actuel de notre compréhension de la turbulence développée. La turbulence développée est l'étude des écoulements dissipatifs dans la limite des grands nombres de Reynolds (nombre sans dimension caractérisant le rapport de l'advection non linéaire à la dissipation linéaire), c'est-à-dire dans la limite où la dissipation devenant négligeable, la dynamique de l'écoulement est essentiellement dominée par les interactions non linéaires.

Après plus d'un siècle d'étude de la turbulence /Reynolds 1883/ aucune explication théorique convaincante n'a donné lieu à un consensus parmi les physiciens (pour une revue historique des différentes théories de la turbulence se reporter à /Von Neumann 1949/, /Monin et Yaglom 1975/, /Farge 1990/). Certes il existe un grand nombre de modèles ad hoc, dits 'phénoménologiques', largement utilisés par les mécaniciens des fluides pour interpréter les expériences et permettre de calculer les nombreuses applications industrielles où la turbulence joue un rôle. Cependant on ne sait toujours pas si la turbulence développée a bien le comportement universel (c'est-à-dire indépendant des conditions initiales et des conditions aux limites) qu'on lui suppose dans la limite des nombres de Reynolds infiniment grands et des échelles infiniment petites. En 1979, dans un article non publié /Farge 1979/, j'émettais déjà des réserves quant à notre compréhension de la turbulence et pensais que l'on n'avait pas encore su dégager les 'bonnes questions'. Dix ans de travail sur le sujet me confirment dans le fait que nous n'avons toujours pas identifié les 'bons objets', j'entends les structures et les interactions élémentaires à partir desquelles on pourra construire une théorie statistique satisfaisante de la turbulence développée.

A mon avis, et comme l'exprime Zabusky /1984/ dans la phrase que j'ai mise en exergue de cet article, l'ignorance des mécanismes physiques élémentaires en jeu dans les écoulements turbulents provient en partie du fait que l'on raisonne en modes de Fourier (vecteurs d'onde), construits à partir de fonctions qui ne sont pas à support compact, ce qui élude la présence des structures cohérentes que l'on observe dans l'espace physique et dont le rôle dynamique nous semble cependant essentiel. Ces structures cohérentes sont mises en évidence à la fois par des expériences effectuées en laboratoire /Jimenez 1981/, /Van Dyke 1982/, /Couder et Basdevant 1986/ et par des expériences numériques effectuées à l'ordinateur à partir des équations fondamentales de la mécanique des fluides /Kim et Moin 1979/, /Basdevant, Legras, Sadourny et Béland 1981/, /McWilliams 1984/, /Farge et Sadourny 1989/, mais la théorie statistique actuelle /Monin et Yaglom 1975/ n'en tient pas compte. Ainsi, la visualisation de l'évolution de champs turbulents bidimensionnels calculés numériquement (**Figure 1**) nous amène-t-elle à conjecturer que la dynamique d'un écoulement turbulent bidimensionnel est essentiellement dominée par les interactions entre les structures cohérentes qui brassent l'écoulement résiduel situé entre elles, ce dernier ne semblant jouer quant à lui aucun rôle dynamique. Nous pensons que ce point de vue peut également se généraliser en dimension trois car on a aussi mis en évidence l'existence de structures cohérentes au sein d'écoulements tridimensionnels /Kim et Moin 1979/, /Jimenez 1981/, /Hussain 1986/, mais leur topologie est alors plus complexe /Moffatt 1990/. En conséquence la transformée en ondelettes, qui décompose les champs sur un ensemble de fonctions à support compact (ou quasi-compact) et permet ainsi une analyse à la fois en espace et en échelle, nous semble être un bon candidat pour, dans un premier temps, analyser et interpréter les résultats expérimentaux obtenus en turbulence bidimensionnelle, mais surtout à terme pour tenter de reconstruire une théorie statistique de la turbulence développée plus satisfaisante.



Figure 1

*Simulation numérique d'un écoulement turbulent bidimensionnel non forcé:
évolution temporelle sur 100 000 pas d'intégration
calculés à partir d'un état initial aléatoire*

1. La turbulence développée

11. Les équations

L'équation fondamentale de la dynamique d'un fluide incompressible (masse volumique constante au cours du temps) et newtonien (déformation proportionnelle aux gradients de vitesse) est l'équation de Navier-Stokes :

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \nu \nabla^2 \vec{V} + \vec{F} \\ \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \text{conditions initiales} \\ \text{conditions aux limites,} \end{cases}$$

avec $\vec{V}$ vitesse,

$\vec{F}$ résultante des forces extérieures par unité de masse,

ν viscosité cinématique.

Il faut ici remarquer que la difficulté mathématique de l'équation de Navier-Stokes provient du fait que le petit paramètre ν , qui tend vers zéro dans la limite des grands nombres de Reynolds, c'est-à-dire des écoulements très turbulents, se trouve devant le terme d'ordre de dérivation le

plus élevé qui est le terme de dissipation $\nu \nabla^2 \vec{V}$. Ainsi le caractère de l'équation, qui est donné par le terme d'ordre de dérivation le plus élevé, change-t-il quand ν tend vers zéro, car

dans cette limite c'est le terme d'advection $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ qui domine. Dans le cas $\nu=0$, ou $Re=\infty$, l'équation de Navier-Stokes s'appelle alors équation d'Euler et le terme d'advection non linéaire n'est plus contrôlé par le terme de dissipation linéaire. De plus l'équation d'Euler conserve l'énergie tandis-que l'équation de Navier-Stokes dissipe celle-ci, la première est donc réversible en temps tandis-que la seconde est irréversible.

Si on prend le rotationnel de l'équation (1) on peut éliminer le terme de pression, ce qui donne l'équation du rotationnel de la vitesse, encore appelé vorticité $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \{0,0,\omega\}$:

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_t \vec{\omega} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \nabla \times \vec{F} \\ \vec{\omega} = \nabla^2 \psi. \end{cases}$$

Si l'on considère un état de régime, c'est-à-dire un état de l'écoulement tel que l'énergie apportée par les forces extérieures est dissipée par les forces de frottement visqueux, alors :

$$(3) \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V}.$$

Ainsi en dimension 3 la variation Lagrangienne de la vorticité est-elle égale au produit de la vorticité par les gradients de vitesse, ce qui donne lieu à un étirement des tubes de vorticité par les gradients de vitesse, mécanisme qui peut expliquer le transfert d'énergie vers les plus petites échelles de l'écoulement en dimension 3 (cf. **paragraphe 12**).

En dimension 2, la vorticité devient un pseudo-scalaire, car $\omega = (0,0,\omega)$ est orienté perpendiculairement au plan où se trouve $\nabla \vec{V}$. Il n'y a donc dans ce cas plus d'étirement possible de la vorticité par les gradients de vitesse. Ainsi en dimension 2 la vorticité est-elle un invariant Lagrangien du mouvement car, en l'absence de dissipation, elle est conservée au cours du temps le long d'une trajectoire fluide :

$$(4) \quad \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Si l'on considère maintenant les gradients de la vorticité, on a :

$$(5) \quad \partial_t \nabla \omega + (\vec{V} \cdot \nabla) \nabla \omega = -(\nabla \omega \cdot \nabla) \vec{V}.$$

Donc, en dimension 2, la variation Lagrangienne des gradients de vorticité est égale au produit des gradients de vorticité par les gradients de vitesse, mécanisme qui peut expliquer le transfert d'entrophie vers les plus petites échelles de l'écoulement en dimension 2 (cf. **paragraphe 12**).

12. Les invariants

On montre qu'en l'absence de forces extérieures ($F=0$) et de dissipation ($\nu=0$), l'équation d'Euler (c'est-à-dire l'équation de Navier Stokes pour $\nu=0$) conserve l'énergie, ceci en dimension 2 et 3 :

$$(6) \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{V}^2(\vec{x}, t) d^n \vec{x} = \text{Constante}$$

avec n dimension de l'espace.

Ou encore, en utilisant l'identité de Plancherel :

$$(7) \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{V}^2(\vec{k}, t) d^n \vec{k} = \int_0^\infty E(|\vec{k}|, t) d^n |\vec{k}| = \text{Constante}$$

$$\text{avec} \quad \hat{V}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\vec{x}) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^n \vec{x}$$

et $E(k)$ énergie intégrée selon des couronnes de rayon $|\vec{k}|$ constant dans l'espace spectral.

$E(k)$ caractérise la distribution de l'énergie suivant les différentes échelles (au sens nombre d'onde) du mouvement, distribution modale que prédit la théorie statistique (cf. **paragraphe 12**).

Dans le cas particulier de la dimension 2, intéressant surtout pour les écoulements géophysiques de grande échelle pour lesquels l'approximation bidimensionnelle est valide, l'équation d'Euler conserve également l'ensrophie:

$$(8) \quad \Omega(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2(\vec{x}, t) d^2 \vec{x} = \text{Constante},$$

ou encore en utilisant l'identité de Plancherel:

$$(9) \quad \Omega(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\omega^2}(\vec{k}, t) d^2 \vec{k} = \int_0^{\infty} Z(|\vec{k}|, t) d^2 |\vec{k}| = \text{Constante}$$

$$\text{avec} \quad \widehat{\omega}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^2 \vec{x}$$

et $Z(k)$ enstrophie intégrée selon des couronnes de rayon $|\vec{k}|$ constant dans l'espace spectral.

$Z(k)$ caractérise la distribution de l'enstrophie suivant les différentes échelles (nombres d'onde) du mouvement et, en faisant des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie au sens statistique (cf. **paragraphe 14**), on peut la relier à l'énergie modale par la relation :

$$(10) \quad Z(k) = k^2 E(k) \quad \text{avec} \quad k = |\vec{k}|.$$

13. Unicité, régularité et analyticité des solutions

Nous allons essayer de faire brièvement le point sur les théorèmes existants concernant l'unicité, la régularité et l'analyticité des solutions des équations d'Euler et de Navier-Stokes en dimension 2 et en dimension 3. En général ces différents théorèmes considèrent des conditions initiales régulières, appartenant à l'ensemble des fonctions C^∞ à support borné dans $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, en dimension 2, la conservation Lagrangienne de la vorticité (4) implique :

$$(11) \quad \|\omega\|_{L^\infty} = \sup |\omega(x, y)| = \text{Constante},$$

ce qui conduit à prédire que les solutions d'Euler restent régulières pour tout temps dans un domaine borné /Lichtenstein 1925/, /Wolibner 1933/, /Hölder 1933/, /Schaeffer 1937/. Kato /1972/ a montré que ceci reste vrai même si le champ de vitesse initial est $C^{1+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$). Par contre on ne dispose pas à ce jour de théorème de régularité pour Euler dans un domaine non borné si on n'ajoute pas une contrainte de décroissance à l'infini des solutions. Un cas particulier intéressant à signaler ici est celui de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui se développe à l'interface entre deux écoulements de vitesses différentes; si l'écoulement initial présente une discontinuité de la vitesse au niveau de l'interface, il a été conjecturé /Birkhoff 1962/, puis démontré /Babenko et Petrovich 1979/, /Sulem et al. 1981/ que, si cet interface est initialement une courbe analytique, elle le reste pour un temps fini. Cependant une expansion asymptotique de Moore /1979/, et des résultats numériques /Meiron et Baker 1982/ suggèrent

que cette courbe finit toujours par développer une singularité. En dimension 2 la régularité globale de l'équation de Navier Stokes dans un domaine non borné, ceci quelque soit la viscosité, découle de la régularité de l'équation d'Euler pour un domaine borné. Ladyzhenskaya /1963/ et Lions /1969/ ont démontré la régularité globale de l'équation de Navier-Stokes en dimension 2 à condition que la viscosité soit suffisamment forte. Cependant dans la limite ν tendant vers zéro le problème reste ouvert, car on ne sait pas prendre en compte les couches limites qui se développent aux frontières.

En dimension 3 on montre que, si on a des conditions initiales régulières, on a unicité, régularité et analyticité dans les cas suivants :

- pour tout temps mais à condition que la viscosité soit forte (Reynolds < 1 initialement) /Leray 1933/,
- pour une viscosité arbitraire, des frontières quelconques, mais à condition que le temps soit suffisamment long /Leray 1933/, ou pour des temps courts en l'absence de frontières /Kato 1972/,

- pour tout temps mais pour une dissipation de la forme $-\nu'(-\nabla^2)^\alpha$ avec

$\nu' > 0$ et $\alpha \geq 5/4$ /Ladyzhenskaya 1963/, /Lions 1969/.

Pour des exposés plus détaillés sur ce sujet se reporter à Rose et Sulem /1978/, Frisch /1983/ et Temam / 1984/.

Pour finir nous voudrions ici faire remarquer que la conservation Lagrangienne de la vorticité pour l'équation d'Euler en dimension 2 (4) implique que, si le champ de vorticité initial présente N singularités, celles-ci seront conservées pour tout temps et il n'y aura donc pas de régularisation de l'écoulement en l'absence de dissipation /Farge et Holschneider 1990/ ; nous reviendrons sur ce point dans la dernière partie.

14. Théorie statistique et pentes spectrales

Il faut tout d'abord signaler que la théorie statistique de la turbulence développée, que l'on attribue à Kolmogorov, a été découverte quasi-simultanément par lui-même /Kolmogorov 1941a, 1941b, 1941c/, Obukhov /1941/, par Onsager /1945/, ainsi que par Heisenberg /1948/ et Von Weizsäcker /1948/, chacun utilisant des méthodes différentes que nous n'exposerons pas ici (se reporter à l'article d'histoire des sciences de Battimelli et Vulpiani /1982/). Kolmogorov étudie comment l'équation de Navier-Stokes en dimension 3 répartit l'énergie entre les différents degrés de liberté du système. Ce type d'approche est très classique en mécanique statistique, mais ici la difficulté provient du fait que l'écoulement turbulent est un système thermodynamique ouvert, c'est-à-dire non isolé de l'extérieur, ceci à cause des forces agissant sur l'écoulement, soit à grande échelle (forces extérieures), soit à petite échelle (forces de frottement visqueux). Il faut donc se limiter à une gamme d'échelles intermédiaires, appelée zone inertielle, où l'on va supposer que l'énergie est transférée entre les différents degrés de liberté, à savoir les échelles de l'écoulement, ceci de façon conservative. Ainsi a-t-on :

$$(12) \quad \lambda \ll l \ll L$$

- λ échelle dissipative où l'énergie cinétique est transformée en énergie thermique sous l'effet du frottement visqueux,
 l échelle du mouvement turbulent dominée par l'advection nonlinéaire qui transfère l'énergie cinétique entre les différentes échelles de façon conservative,
 L échelle intégrale où se fait l'injection d'énergie par les forces extérieures.

Kolmogorov suppose que pour cette gamme d'échelles l , l'écoulement est statistiquement (au sens des moyennes d'ensemble de Gibbs, c'est-à-dire en considérant des moyennes calculées à partir d'un ensemble de réalisations d'un même écoulement) homogène, c'est-à-dire invariant par translation, et isotrope, c'est-à-dire invariant par rotation. Il suppose également que l'énergie est transférée, des grandes vers les petites échelles, selon un taux constant ϵ indépendant de l'échelle, et qui est égal à la quantité d'énergie dissipée aux échelles inférieures à λ . Il ajoute à cela l'hypothèse que l'écart à la gaussianité S de la distribution de probabilité de la vitesse est constant, ce qui lui permet de déduire une loi d'échelle pour les moments d'ordre 2 de la vitesse telle que:

$$(13) \quad \langle |v(r+l) - v(r)|^2 \rangle \sim C \epsilon^{2/3} l^{2/3}$$

avec $C = -4/(5S)$ constante de Kolmogorov,

ce qui donne, en passant dans l'espace des vecteurs d'onde $\vec{k}$ par transformée de Fourier :

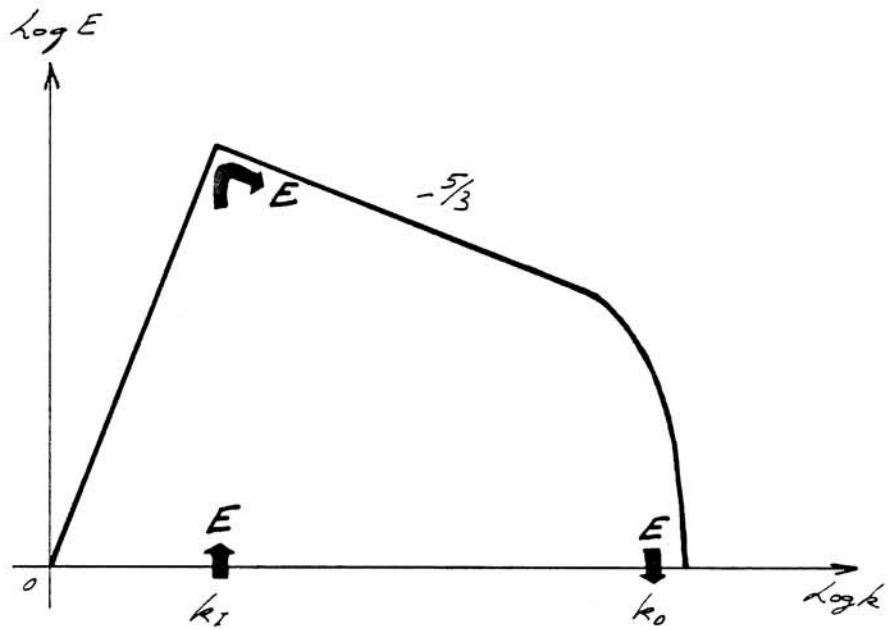
$$(14) \quad \epsilon = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}^2(\vec{k}) d^3 \vec{k} \sim C \epsilon^{2/3} k^{-2/3},$$

et en considérant cette fois-ci l'énergie intégrée par couronnes de rayon $k = |\vec{k}|$ constant, on obtient le spectre, dit de Kolmogorov (**Figure 2a**) :

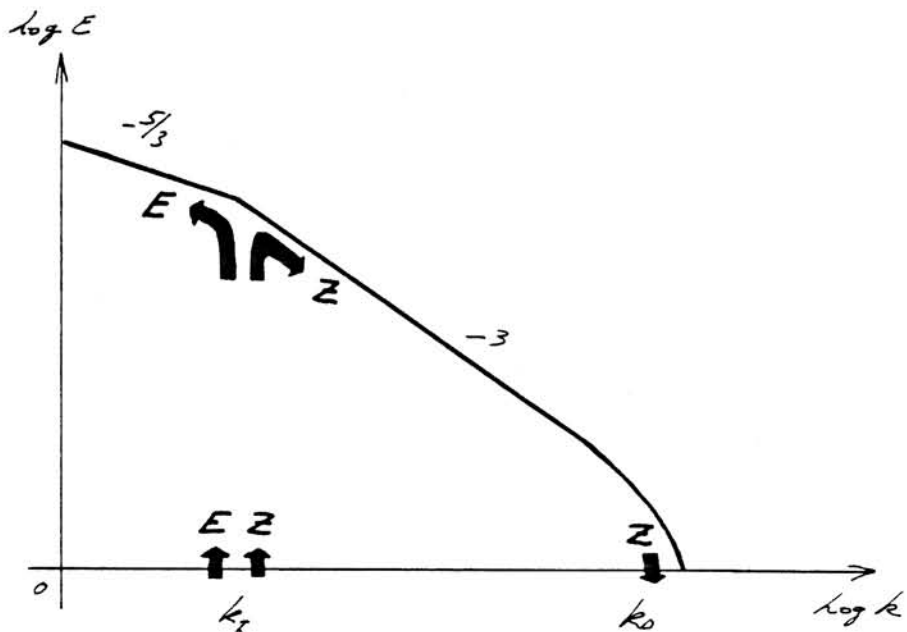
$$(15) \quad E(k) \sim C \epsilon^{2/3} k^{-5/3}.$$

Il faut ici remarquer que Kolmogorov n'a jamais exprimé sa loi dans l'espace des nombres d'onde, tandis que la théorie d'Heisenberg /1948/ et de Von Weizsäcker /1948/ qui donne le même résultat est directement calculée dans l'espace spectral.

A la suite d'une remarque de Landau /Landau et Lifchitz 1971/ concernant le caractère fortuit des transferts d'énergie dans la zone inertielle, Kolmogorov /1961/ a apporté à sa loi d'échelle (13) une correction dite lognormale en $\ln(L/l)^\beta$, β étant la constante de dispersion



a. Spectre de Kolmogorov pour la turbulence tridimensionnelle



b. Spectre de Kraichnan pour la turbulence bidimensionnelle

Figure 2

Spectres prédits par la théorie statistique de la turbulence

du logarithme de ε . Diverses expériences effectuées en soufflerie /Batchelor et Townsend 1949/, /Anselmet, Gagne, Hopfinger et Antonia 1984/ ont montré que l'énergie associée aux petites échelles d'un écoulement turbulent n'est pas répartie de façon dense dans l'espace. Cette observation d'une intermittence spatiale du support des transferts d'énergie a conduit plusieurs auteurs à supposer que ce support est fractal /Mandelbrot 1975 /, /Mandelbrot 1976/, /Frisch, Sulem et Nelkin 1978/ ou multifractal /Parisi et Frisch 1985/, ce qui donne également lieu à une correction du spectre de Kolmogorov (15), cette fois-ci en $(kL)^{-(3-D/3)}$, D étant la dimension de Hausdorff des structures dissipatives.

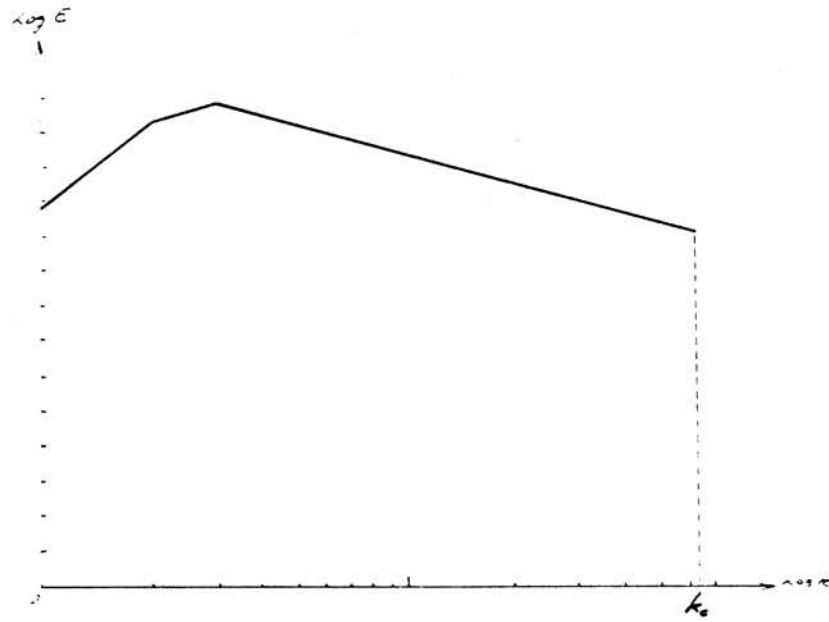
En dimension 2, la conservation de l'enstrophie, reliée à celle de l'énergie par la relation (10), conduit à une modification de la théorie statistique pressentie par Von Neumann /1949/, car elle empêche l'énergie de cascader des grandes vers les petites échelles dans la limite k tendant vers l'infini, l'énergie étant au contraire transférée vers les grandes échelles selon une loi spectrale qui correspond bien à celle de Kolmogorov (15) : c'est la cascade inverse de l'énergie en turbulence bidimensionnelle (**Figure 2b**). Kraichnan /1967/ et Batchelor /1969/ ont montré qu'il y avait alors une autre cascade, mais d'enstrophie (9) cette fois-ci, des grandes vers les petites échelles (**Figure 2b**) et, en supposant le taux de transfert d'enstrophie η constant dans la zone inertielle, ils ont prédit le spectre d'énergie suivant pour la turbulence bidimensionnelle :

$$(16) \quad E(k) \sim \eta^{2/3} k^{-3}.$$

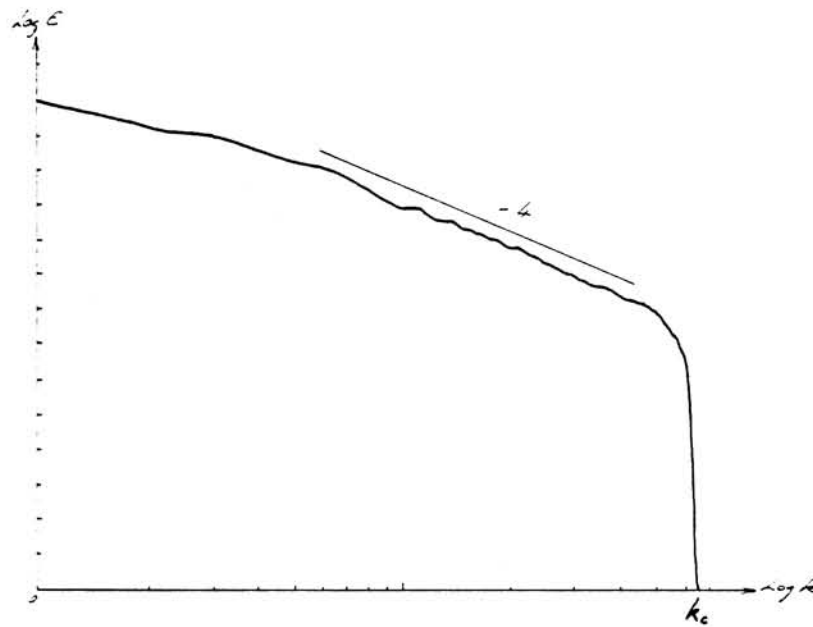
Kraichnan /1971/ a apporté un terme de correction en $(\ln Lk)^{-1/3}$ pour tenir compte du fait qu'en turbulence bidimensionnelle les transferts sont non locaux dans l'espace spectral.

15. Simulations numériques et structures cohérentes

Nous nous limiterons ici au cas de la turbulence bidimensionnelle incompressible pour laquelle il est très difficile d'effectuer des expériences de laboratoire dans des conditions rigoureusement bidimensionnelles et où, par contre, la simulation numérique permet, à puissance de calculateur égale, d'atteindre des nombres de Reynolds Re plus élevés qu'en dimension 3, car en dimension 2 le nombre de points du maillage varie comme Re , tandis qu'en dimension 3 on a besoin de $Re^{9/4}$ points. En général les expériences numériques s'effectuent avec des conditions aux limites périodiques et en partant de champs initiaux aléatoires dont l'énergie est répartie sur une large bande spectrale, le plus souvent jusqu'à l'échelle de coupure du maillage (**Figure 3a**). On suit l'évolution de l'écoulement à la fois dans l'espace physique, à l'aide de visualisations du champ de vorticités (**Figure 1**), qui est la quantité la plus significative dans la mesure où c'est un invariant Lagrangien du système pour $v=0$, et dans l'espace spectral en traçant le spectre de l'énergie intégrée sur des couronnes $|\vec{k}| = \text{Constante}$ (**Figure 3b**).



a. Etat initial



b. Etat après 100 000 pas de temps d'intégration

Figure 3

Distribution spectrale de l'énergie pour un écoulement turbulent bidimensionnel non forcé calculée numériquement

Les spectres ainsi calculés s'établissent le plus souvent selon une loi de puissance en k^{-4} (Figure 2b), et non en k^{-3} comme le prédit la théorie de Kraichnan /1967/ (Figure 2b). On pense que cet écart est dû à l'intermittence de l'écoulement à petite échelle pour laquelle nous proposerons une interprétation géométrique (cf. **paragraphe 32**) s'appuyant sur la présence des structures cohérentes formées au sein des écoulements turbulents bidimensionnels que l'on observe dans les expériences numériques mais dont ne parle pas la théorie statistique.

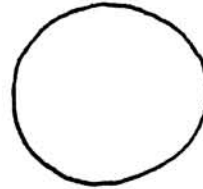
Qu'est-ce qu'une structure cohérente ? Nous ne disposons pas actuellement de théorie pour caractériser celles-ci, aussi doit-on se contenter d'une description qualitative, qui relève plus de la démarche du zoologue que de celle habituelle au mécanicien des fluides. Mais c'est une étape taxonomique et descriptive nécessaire et préalable à toute théorisation. En nous appuyant sur les visualisations de champs turbulents bidimensionnels calculés numériquement (Figure 1), nous pouvons caractériser les structures cohérentes de la façon suivante :

- ce sont des structures tourbillonnaires, c'est-à-dire des régions de l'écoulement pour lesquelles la vorticité l'emporte sur la déformation,
- elles contiennent en leur sein l'essentiel de l'énergie et de l'ensrophie de l'écoulement,
- elles se forment spontanément par une condensation du champ de vorticité, pour laquelle on ne dispose pas de théorie actuellement,
- elles se rencontrent sur une large gamme d'échelle, en fait tout le long de la zone inertielle s'il n'y a pas de forçage,
- elles survivent sur des échelles de temps bien supérieures au temps moyen de retournement des tourbillons $\tau = Z^{1/2}$ choisi par la théorie statistique comme temps caractéristique des transferts d'ensrophie.

Quand on étudie la dynamique des structures cohérentes on peut distinguer les états et les interactions élémentaires suivantes :

1. **état relaxé,**

aximétrisation en
l'absence d'autre
structure cohérente
proche,



2. **états faiblement excités,**

soit déformation sous
l'effet d'une structure
cohérente voisine de
même intensité,



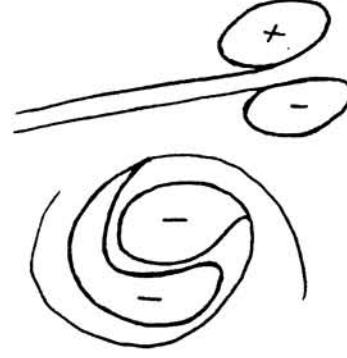
soit filamentation
quand la déformation
devient trop forte sous
l'effet d'une structure
cohérente voisine plus
intense,



3. états fortement excités,

soit **liaison** de deux structures cohérentes très proches de signes opposés et d'intensités comparables,

soit **fusion** de deux ou plusieurs structures cohérentes très proches de même signe.



Si nous avons défini les structures cohérentes de façon purement qualitative à partir de leur observation dans les résultats de simulations numériques, il est également possible de les caractériser de façon plus quantitative en étudiant le tenseur du gradient de la vitesse, appelé tenseur de cisaillement, que l'on note :

$$(17) \quad \nabla V = (\nabla V)_{ij} = \partial_j V_i = V_{i,j}$$

Sa partie symétrique caractérise la déformation subie par l'élément fluide considéré et s'écrit :

$$(18) \quad \frac{1}{2}(\nabla V + \nabla V^t) = \begin{vmatrix} \partial_1 v_1 & \frac{1}{2}(\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) & \partial_2 v_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & -s_1 \end{vmatrix},$$

avec ∇V^t matrice transposée de ∇V et $s_1 = 2\partial_1 v_1 = -2\partial_2 v_2$ dans la mesure où le fluide est incompressible.

Sa partie antisymétrique correspond à la rotation de l'élément fluide considéré et s'écrit :

$$(19) \quad \frac{1}{2}(\nabla V - \nabla V^t) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2) \\ \frac{1}{2}(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{vmatrix}.$$

En additionnant (18) et (19), (17) devient :

$$(20) \quad \nabla V = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} s_1 & s_2 + \omega \\ s_2 - \omega & -s_1 \end{vmatrix}.$$

Si on calcule le rotationnel de l'équation de la vorticité (2), sans forçage ($\vec{F} = 0$) ni dissipation ($\nu = 0$), on obtient l'équation du rotationnel de la vorticité, encore appelé divorticit  $\xi = \nabla \times \omega = (\partial_2 \omega - \partial_1 \omega, 0)$:

$$(21) \quad \begin{cases} \partial_t \xi + (\vec{V} \cdot \nabla) \xi = (\nabla V) \xi \\ \nabla \cdot \xi = 0 \end{cases}$$

Si on suppose que les variations spatio-temporelles du tenseur de cisaillement ∇V sont lentes par rapport à celles du rotationnel de la vorticité ξ (hypothèse de Weiss /1981/), l'équation (21) devient linéaire en coordonnées Lagrangiennes :

$$(22) \quad \begin{cases} \omega(x_0, y_0, t) = \omega_0 \\ \frac{d\xi}{dt} = (\nabla V) \xi \end{cases}$$

Les valeurs propres du tenseur de cisaillement sont :

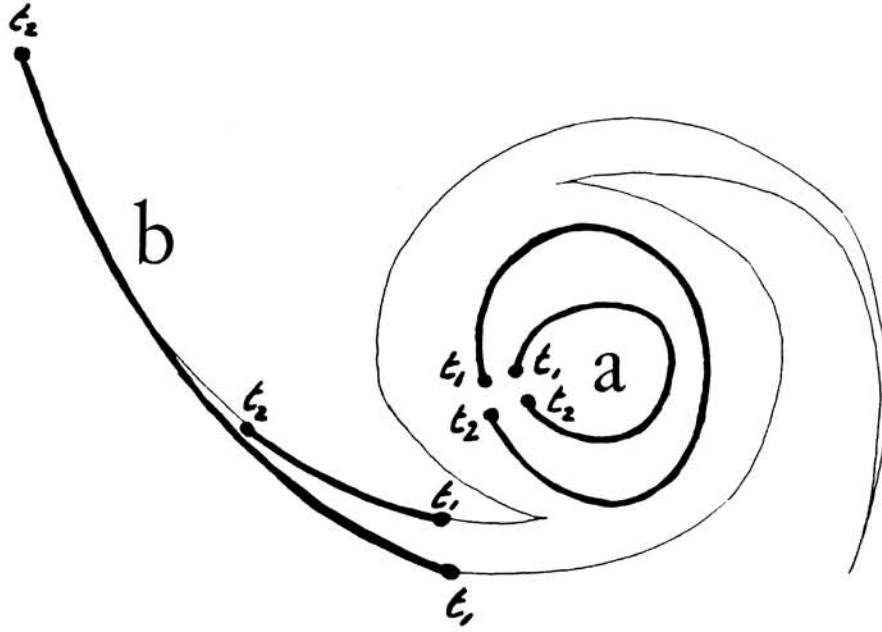
$$(23) \quad \alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \sqrt{-\det(\nabla V)} = \pm \frac{1}{2} \left[s_1^2 + s_2^2 - \omega^2 \right]^{1/2}$$

On peut ainsi séparer l'écoulement en deux types de régions où la dynamique Lagrangienne est différente :

1. des **régions elliptiques**, correspondant aux valeurs propres imaginaires pures, où la rotation domine la déformation et pour lesquelles deux particules fluides initialement voisines le restent pour tout temps, leur écart n'oscillant que légèrement au cours du temps (**Figure 4a**), ces régions sont donc associées aux structures cohérentes géométriquement stables,
2. des **régions hyperboliques**, correspondant aux valeurs propres réelles de signes opposés, où la déformation domine la rotation et pour lesquelles deux particules fluides initialement voisines s'écartent exponentiellement au cours du temps, leur écart se contractant dans une direction et se dilatant dans l'autre direction (**Figure 4b**), ces régions sont donc associées aux filaments de vorticité étirés par les gradients de vitesse.

Figure 4

Caractérisation dynamique des structures cohérentes



a. région elliptique correspondant aux structures cohérentes

b. région hyperbolique correspondant aux filaments de vortacité

En conclusion, au vu des simulations numériques que nous avons effectuées, nous conjecturons que la dynamique des écoulements turbulents bidimensionnels est essentiellement dominée par les interactions entre les structures cohérentes qui brassent l'écoulement résiduel, formé par les filaments de vortacité émis lors des interactions et qui pour leur part ne jouent qu'un rôle passif. Ainsi seules les structures cohérentes seraient-elles dynamiquement actives. Si cette conjecture est vérifiée, il devient important de trouver une méthode permettant de séparer les structures cohérentes du reste de l'écoulement, non par une technique de seuillage comme celle que nous venons d'exposer mais plutôt à l'aide d'un filtrage respectant la régularité locale de l'écoulement (cf. **paragraphe 33**).

2. Transformée en ondelettes continue

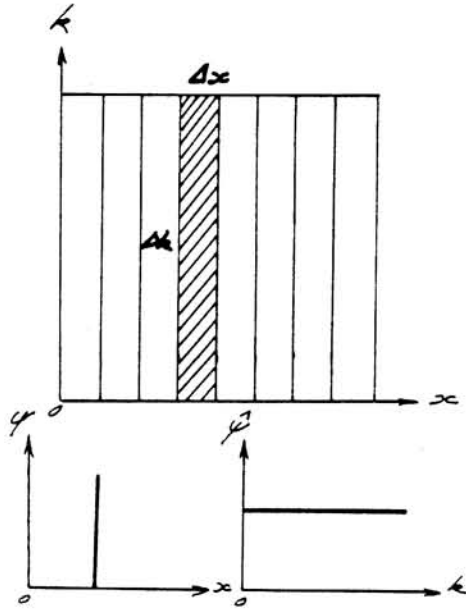
21. Généralités

Dans un signal, l'information utile est, en effet, souvent véhiculée à la fois par les fréquences émises et par la structure temporelle du signal (l'exemple de la musique est caractéristique). La représentation d'un signal comme fonction du temps exhibe mal le spectre des fréquences en jeu, alors qu'au contraire son analyse de Fourier masque l'instant d'émission et la durée de chacun des éléments du signal. Une représentation adéquate devrait combiner les avantages de ces deux descriptions complémentaires' /Balian 1981/. Il faut ici faire remarquer qu'il y aura d'ailleurs toujours un compromis à trouver dans une telle approche car on se heurte au principe d'incertitude qui interdit de voir parfaitement des deux côtés de Fourier à la fois. La transformée en ondelettes, par son aspect adaptatif pour chaque fréquence, semble apporter de ce point de vue le meilleur compromis possible (**Figure 5**).

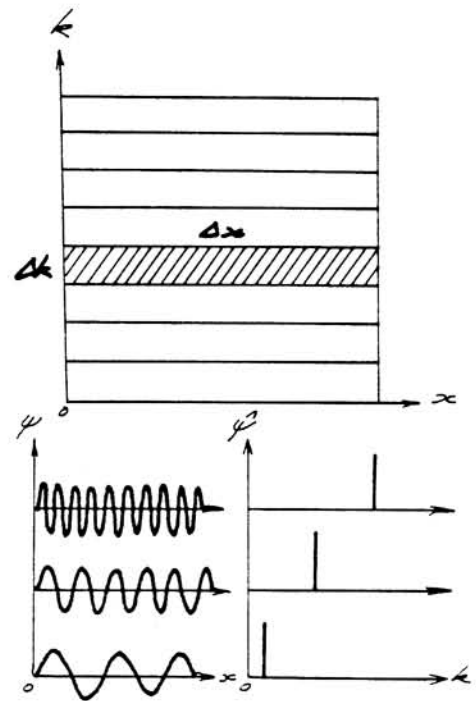
La transformée en ondelettes est donc une nouvelle technique d'analyse et de traitement du signal permettant une décomposition spectrale locale (dans l'espace ou dans le temps suivant qu'il s'agit d'une série spatiale ou temporelle), ce qui n'est pas possible avec la transformée de Fourier classique. La transformée en ondelettes est ainsi particulièrement adaptée au traitement de signaux ou de champs, périodiques ou non, présentant des transitoires rapides, voire des discontinuités. En effet la transformée de Fourier classique, ou la transformée de Fourier dite 'à fenêtre glissante' /Gabor 1946/, présentent différents inconvénients, entre autres la perte de la localisation dans le signal lors de l'analyse, son manque de robustesse face aux erreurs d'arrondi sur les phases ce qui peut être critique pour la resynthèse, et le fait que les fonctions trigonométriques employées ne sont pas de carré intégrable contrairement aux signaux à analyser. L'originalité de la transformée en ondelettes par rapport à la transformée de Fourier est d'utiliser des fonctions analysatrices bien localisées, voire à support compact, ne présentant que quelques oscillations, et d'accéder ainsi à la décomposition en échelle (fréquence pour un signal temporel ou nombre d'onde pour un signal spatial), grâce à une dilatation (ou contraction) purement géométrique à partir d'une ondelette de départ dite ondelette 'mère'. Ceci permet d'adapter à chaque échelle la résolution dans l'espace physique et la résolution dans l'espace spectral de façon optimale par rapport au principe d'incertitude (**Figure 5d**): ainsi à petite échelle la transformée en ondelettes est-elle très précise en espace et imprécise en nombre d'onde, tandis qu'à grande échelle elle devient très précise en nombre d'onde mais perd alors la localisation spatiale. L'analyse en ondelettes se fait par produit de convolution entre le signal à analyser et la famille de fonctions obtenues par translation et dilatation à partir de l'ondelette 'mère'. La synthèse s'effectue également par un produit de convolution, cette fois-ci entre les coefficients d'ondelettes et cette même famille d'ondelettes analysatrices. On vérifie que la transformation en ondelettes conserve bien

Figure 5

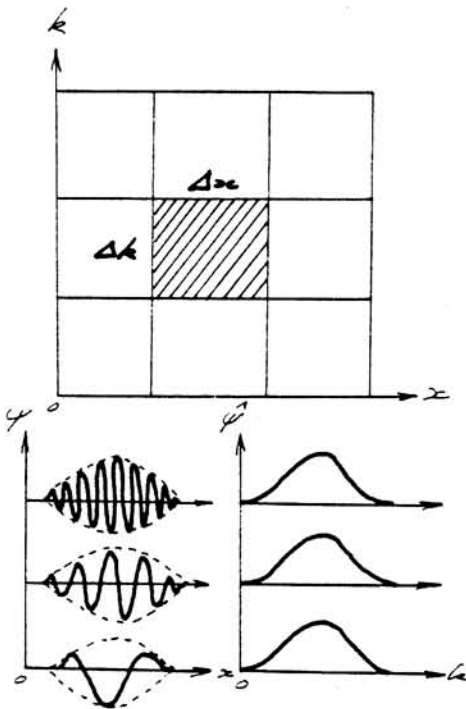
Comparaison entre différentes transformées



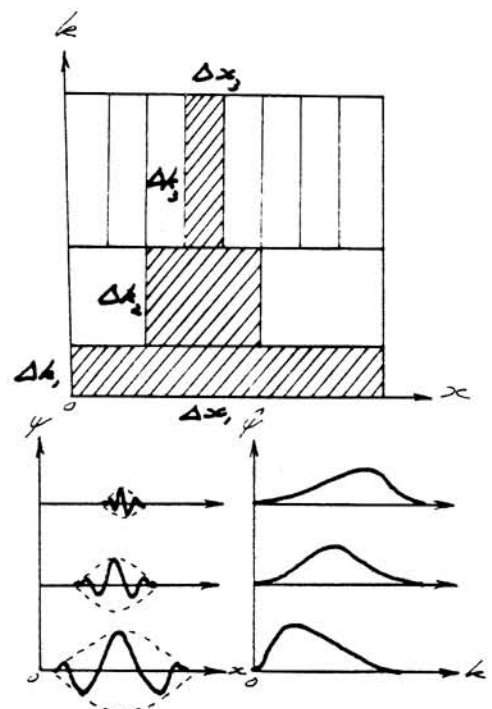
a. *Echantillonnage par un peigne de Dirac*



b. *Transformée de Fourier*



c. *Transformée de Fourier à fenêtre glissante*



d. *Transformée en ondelettes*

l'énergie (identité de Plancherel): on peut donc calculer l'énergie soit dans l'espace physique, soit dans l'espace des coefficients d'ondelettes.

La transformée en ondelettes a été mise-au-point par Jean Morlet et Alex Grossmann à partir de 1981 pour l'analyse de signaux sismiques. Elle s'est ensuite rapidement développée, en particulier avec la découverte de bases d'ondelettes orthonormales par Lemarié et Meyer /1986/, Daubechies /1988/ et Jaffard /1989/. Il existe aujourd'hui plusieurs algorithmes de transformée en ondelettes rapides pour lesquels, de façon analogue à la transformée de Fourier rapide, la quantité d'opérations à effectuer pour analyser un signal discrétisé sur N points varie en $N \log_2 N$ /Holschneider et al. 1988/. L'extension de la transformation en ondelettes à n -dimensions a été faite plus récemment /Murenzi 1989/: on peut ainsi voir la transformée en ondelettes à deux dimensions comme un microscope et un polariseur mathématique, car elle effectue à la fois une décomposition en échelles mais également suivant différents angles. Aujourd'hui la transformée en ondelettes est utilisée dans des domaines aussi divers que le traitement de signaux acoustiques /Kronland-Martinet et al. 1987/, /Saracco et al. 1989/, l'analyse numérique /Beylkin et al. 1989/, /Perrier 1989/, le traitement d'image /Mallat 1989/, l'étude des multi-fractales /Holschneider 1988/, /Arnéodo et al. 1988/, la théorie de la vision /Duval-Destin et Menu 1989/, la mécanique quantique /Daubechies et al. 1987/, /Paul 1989/, la théorie constructive des champs /Battle 1987/, /Federbush 1987/ et l'étude de la turbulence /Farge et Rabreau 1988/, /Argoul et al. 1989/.

Nous ne parlerons ici que de la transformée en ondelettes continue, dont la théorie a été faite par Grossmann et Morlet /1984/, /1985/ en se fondant sur l'utilisation du groupe affine, groupe des translations et des dilatations, ceci dans la continuité des travaux de Calderon en théorie de l'interpolation. La transformée en ondelettes continue transforme un signal à une dimension, l'espace par exemple, en une fonction continue à deux dimensions, les positions auxquelles on accède par les translations b et les échelles auxquelles on accède par les dilatations a . Il y a donc redondance de l'information contenue dans les coefficients d'ondelettes, redondance propre à la transformée en ondelettes continue et que l'on n'a pas avec les ondelettes discrètes orthogonales /Lemarié et Meyer 1986/. Pour l'application à l'analyse d'écoulements turbulents c'est justement cette redondance qui nous intéresse: en effet la transformée en ondelettes permet de déployer les champs des deux côtés de Fourier à la fois et de disposer ainsi d'une double information, en espace et en échelle. Nous espérons ainsi, grâce à la transformée en ondelettes continue, pouvoir associer les cascades turbulentes, dont parle la théorie statistique (cf. **paragraphe 14**), à la dynamique des structures cohérentes observées en laboratoire et dans les expériences numériques (cf. **paragraphe 15**).

22. Définitions

La seule contrainte à laquelle doit se plier une fonction $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, à valeur réelle ou complexe, pour être appelée 'ondelette' est la condition d'admissibilité :

$$(24) \quad C(\hat{\psi}) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(k)|^2 \frac{dk}{|k|} < \infty$$

Si ψ est intégrable, cette condition implique que l'ondelette est de moyenne nulle :

$$(25) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad \text{ou} \quad \hat{\psi}(0) = 0.$$

En pratique on souhaite aussi que l'ondelette soit si possible bien localisée des deux côtés de Fourier :

$$(26) \quad |\psi(x)| < \frac{1}{1 + |x|^n},$$

$$(27) \quad \text{et} \quad |\hat{\psi}(k)| < \frac{1}{1 + |k-k_0|^n},$$

$$(28) \quad \text{avec} \quad \hat{\psi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

et n aussi grand que possible.

La **figure 6** montre quelques exemples d'ondelettes couramment utilisées.

Dans certaines applications, en particulier pour l'étude des fractals, on souhaite aussi que

l'ondelette ait une bonne régularité, c'est-à-dire que $\hat{\psi}(k)$ décroisse suffisamment rapidement au voisinage de 0 ou encore que l'ondelette ait plusieurs moments nuls :

$$(29) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) x^n dx = 0$$

avec n aussi grand que possible.

Ensuite, après avoir choisi l'ondelette de départ ψ , que nous appellerons ondelette 'mère', nous engendrons à partir de celle-ci la 'famille' Ψ des ondelettes continuellement translatées selon un paramètre b et continuellement dilatées selon un paramètre a . On a ainsi :

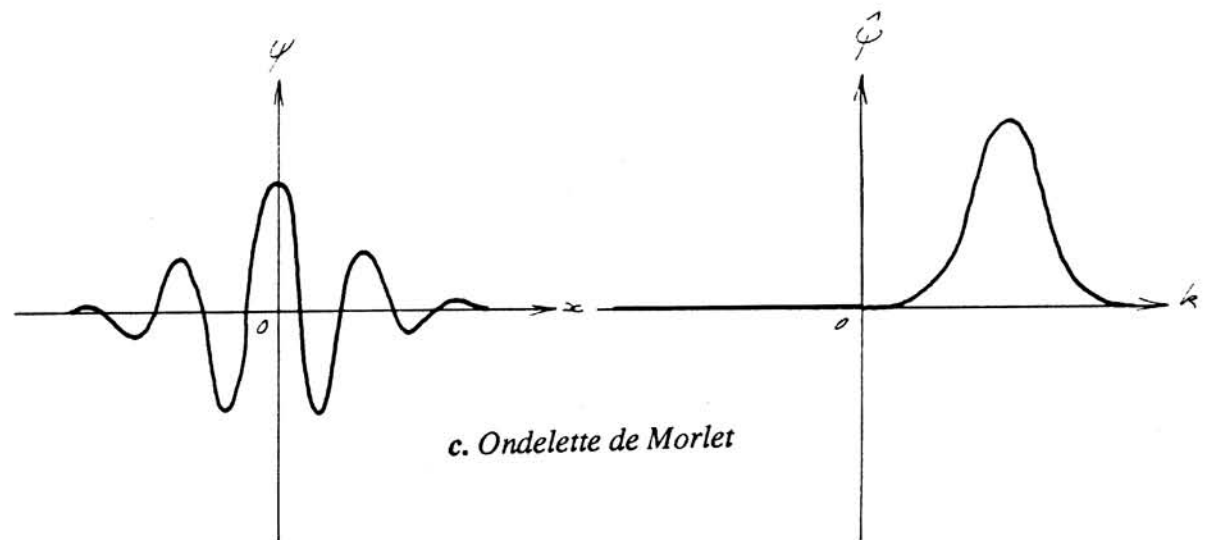
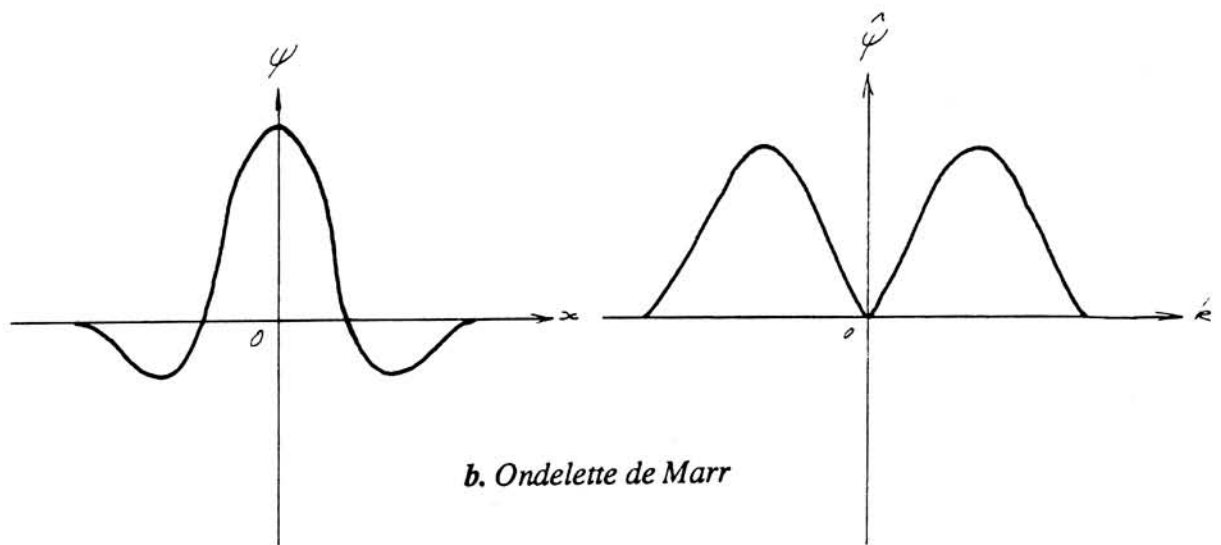
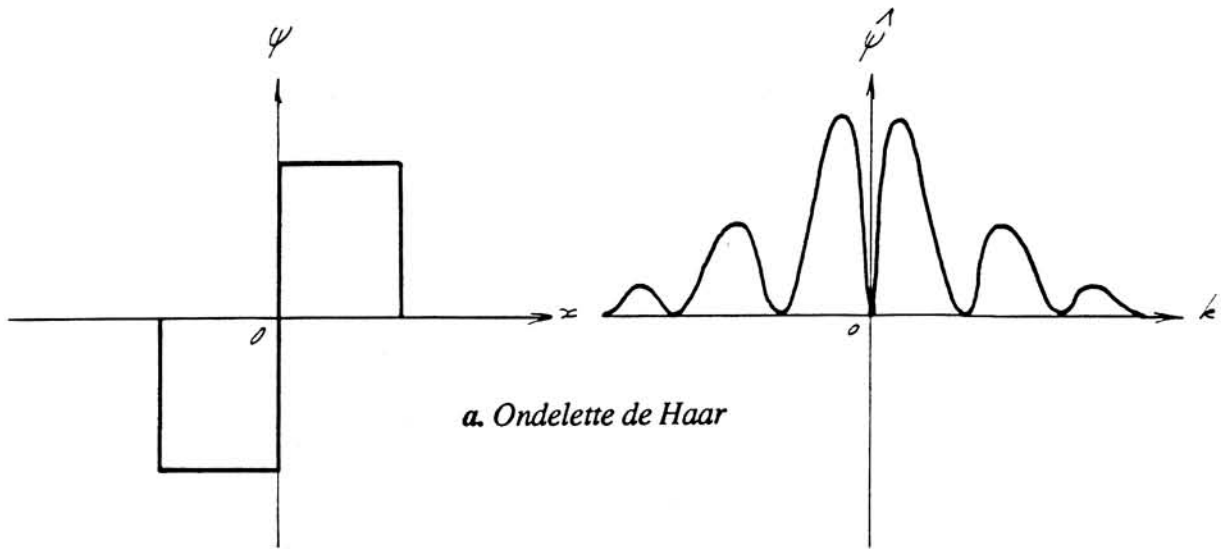


Figure 6

Exemples d'ondelettes analysatrices les plus couramment utilisées

$$(30) \quad \Psi_{b,a}(x) = \frac{1}{N(a)} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

$N(a)$, coefficient de normalisation égal,
soit à $a^{1/2}$ si on veut que le carré du module des coefficients d'ondelette corresponde à une densité d'énergie (norme L^2),
soit à a si on veut que la décroissance du module des coefficients d'ondelette pour a tendant vers zéro au point b_0 donne la régularité locale de la fonction en b_0 (norme L^1).

L'analyse en ondelettes continue de la fonction $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ est donnée par la convolution de $f(x)$ avec l'ensemble des ondelettes translatées et dilatées $\Psi_{b,a}(x)$, telle que:

$$(31) \quad \tilde{f}(b,a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Psi_{b,a}^* dx,$$

avec $\Psi_{b,a}^*$ complexe conjugué de $\Psi_{b,a}$.

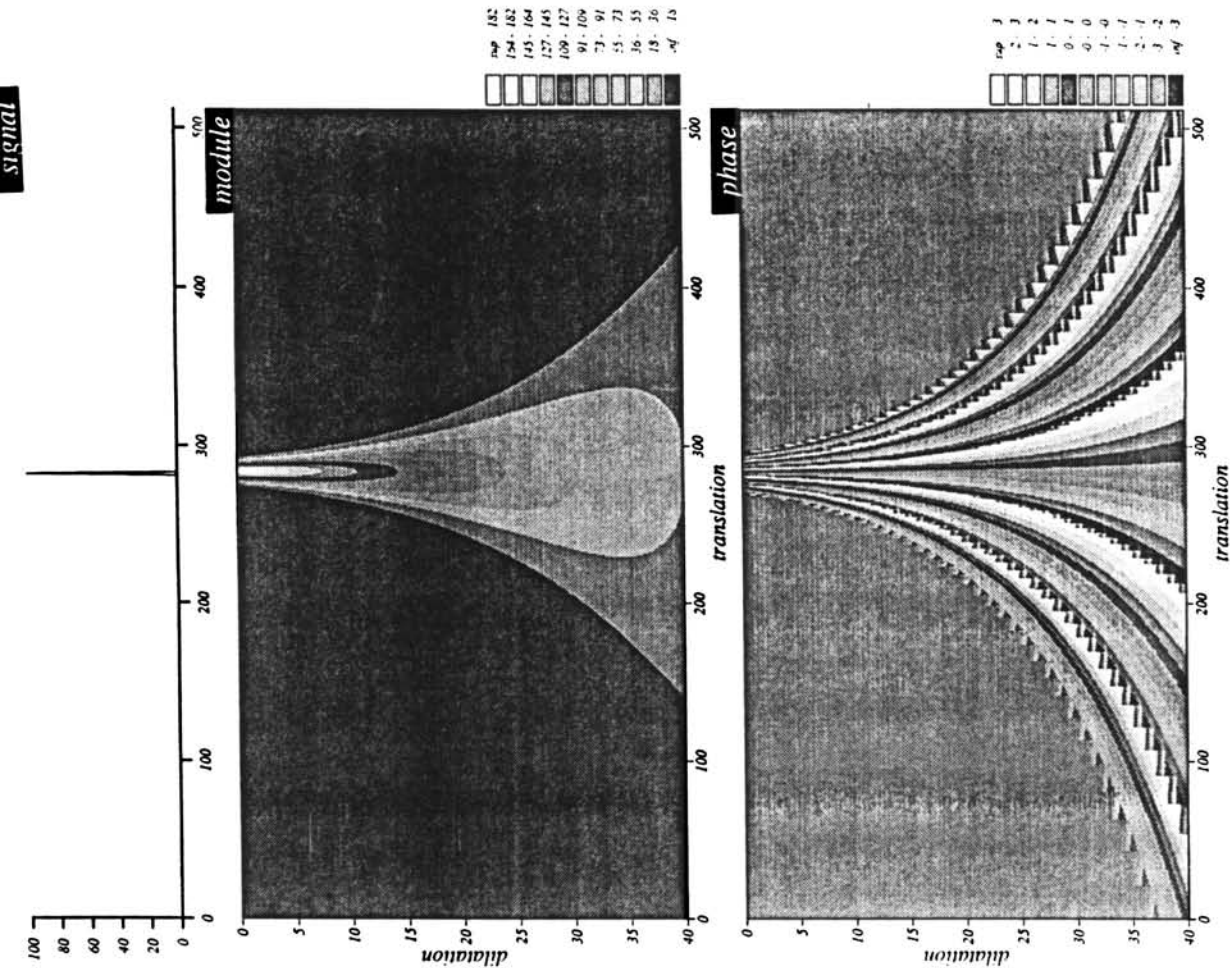
Cette transformation envoie ainsi l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions d'énergie finie dans l'espace $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ des coefficients d'ondelette de mesure $da db/a^2$, mesure de Haar associée au groupe affine. La **figure 7** montre deux exemples d'analyse en ondelettes de signaux académiques: une fonction delta de Dirac et un signal harmonique qui présente un doublement de fréquence.

A partir des coefficients d'ondelette $\tilde{f}(b,a)$ on peut resynthétiser la fonction $f(x)$ selon la transformation inverse :

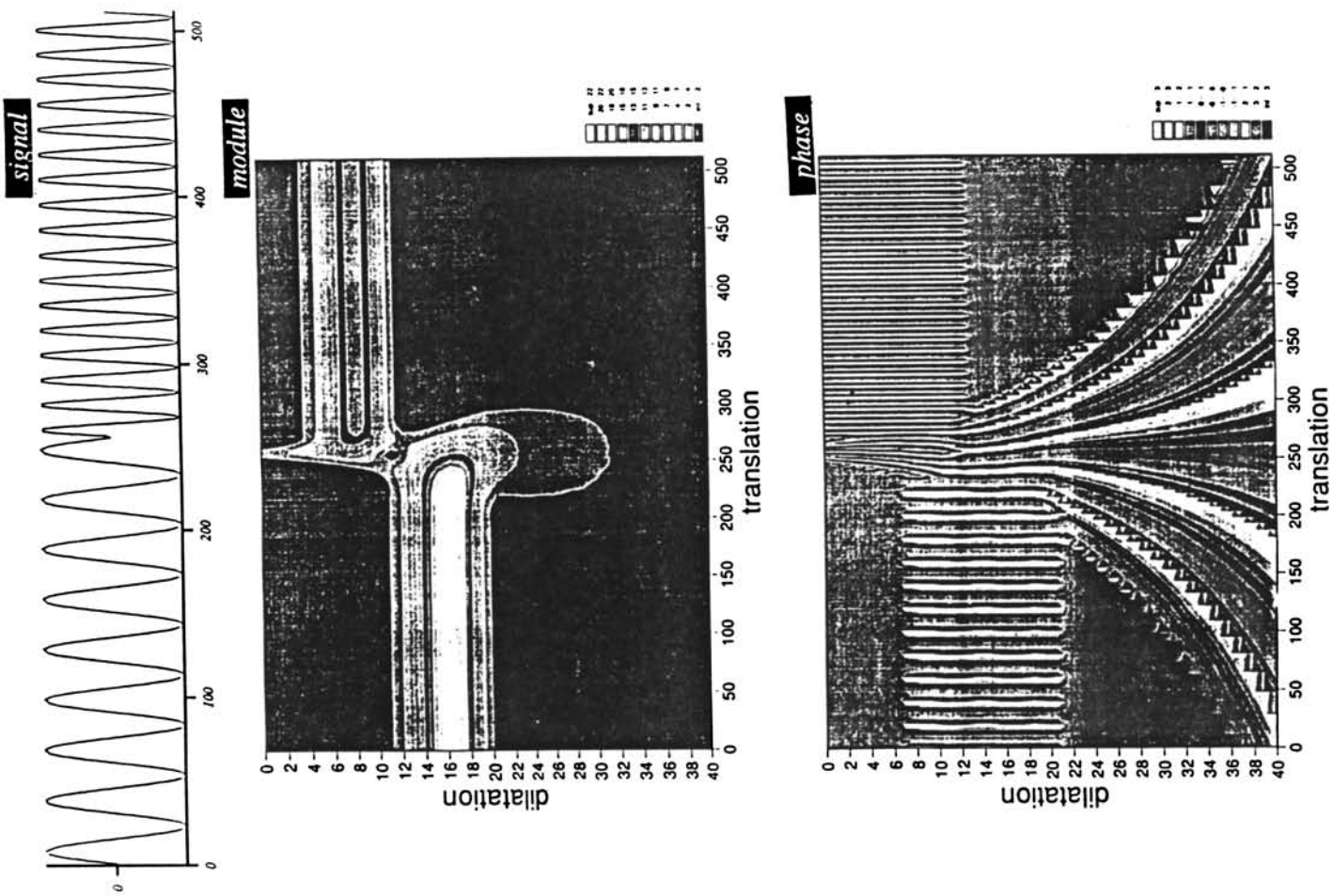
$$(32) \quad f(x) = \frac{1}{C(\psi)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(b,a) \Psi_{b,a}(x) \frac{da db}{a^2}.$$

$$\text{avec} \quad C(\psi) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(k)|^2 \frac{dk}{|k|},$$

coefficient qui est fini de par la condition d'admissibilité (20).



a. Fonction de Dirac



Transformée en ondelettes de signaux académiques

Figure 7

b. Fonction trigonométrique présentant un doublement de fréquence

On vérifie que la transformée en ondelettes continue conserve bien l'énergie (analogue à l'identité de Plancherel) :

$$(33) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\widehat{C(\psi)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(b,a)|^2 \frac{da db}{a^2}$$

On remarque que, si la fonction appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et si l'ondelette est suffisamment régulière (25) et donc bien localisée en Fourier, l'analyse en ondelettes peut être interprétée comme un filtrage passe-bande du signal par un banc de filtres à dk/k constant (**Figure 5d**) :

$$(34) \quad \tilde{f}(b,a) = \frac{a}{2\pi N(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \psi^*(ak) e^{ibk} dk$$

L'extension à n dimensions de la théorie de la transformée en ondelettes continue a été faite par Murenzi/ 1989/ en s'appuyant sur le groupe Euclidien muni des dilatations. La génération de la famille d'ondelettes est obtenue par translation (vecteur b), dilatation (paramètre a) et rotation (opérateur r défini dans $\mathbb{R}^n$) telle que :

$$(35) \quad \Psi_{a,r,b}(\vec{x}) = N(a)^{-n} \psi(a^{-1} r^{-1} (\vec{x} - \vec{b})).$$

Pour $\mathbb{R}^2$, r est la matrice de rotation :

$$(36) \quad r = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

avec θ , angle de rotation.

La condition d'admissibilité s'écrit :

$$(37) \quad C(\hat{\psi}) = (2\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\vec{k})|^2 \frac{d^n \vec{k}}{|\vec{k}|^n} < \infty.$$

Les formules d'analyse et de synthèse deviennent :

$$(38) \quad \tilde{f}(a, r, \vec{b}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{x}) \Psi_{a, r, b}^*(\vec{x}) d^n \vec{x}$$

$$(39) \quad f(\vec{x}) = \frac{1}{C(\hat{\psi})} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(a, r, \vec{b}) \Psi_{a, r, b}(\vec{x}) \frac{da dr d^n \vec{b}}{a^{n+1}}$$

On vérifie encore la conservation de l'énergie :

$$(40) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\vec{x})|^2 d^n \vec{x} = \frac{1}{C(\hat{\psi})} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(a, r, \vec{b})|^2 \frac{da dr d^n \vec{b}}{a^{n+1}}$$

Holschneider / 1988/ a montré que l'on peut reconstruire la fonction $\phi(x)$ à partir des coefficients d'ondelette $\tilde{f}(b, a)$ en utilisant une fonction quelconque $\phi(x)$, ceci à la seule condition que cette dernière vérifie la condition d'admissibilité modifiée :

$$(41) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(k) \phi^*(k) \frac{dk}{|k|} < \infty.$$

Ceci a pour conséquence le fait que l'on peut reconstruire $f(x)$ par simple sommation le long des verticales $b = \text{constante}$, ce qui correspond en fait à l'emploi d'une fonction de Dirac pour la reconstruction :

$$(42) \quad f(x) = \frac{1}{C(\hat{\psi})} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x, a) \frac{da}{a}$$

$$\text{avec } C(\hat{\psi}) = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(k) \frac{dk}{|k|} < \infty.$$

23. Propriétés

Covariance par translation et dilatation

Une des propriétés spécifiques à la transformée en ondelettes continue, et qui est perdue avec la transformée en ondelettes discrète, est la covariance, à la fois par translation :

$$(43) \quad W[f(x-x_0)] = \tilde{f}(b-x_0, a)$$

avec W opérateur de transformée en ondelettes continue,

et à la fois par dilatation par changement d'échelle :

$$(44) \quad W\left[f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] = \frac{1}{\lambda} \tilde{f}\left(\frac{b-b_0}{\lambda}, \frac{a}{\lambda}\right).$$

Linéarité

La transformée en ondelettes continue est une transformation linéaire pour laquelle on a donc le principe de superposition

$$(45) \quad W[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha \tilde{f}_1(b, a) + \beta \tilde{f}_2(b, a)$$

avec α et β deux constantes arbitraires.

Localisation en espace et en échelle

La double localisation des ondelettes des deux côtés de Fourier, exprimée par les conditions (26) et (27), permet de garder une information bien localisée dans l'espace des coefficients d'ondelettes, propriété que l'on n'a pas avec la transformée de Fourier. Ainsi

$\tilde{f}(b_0, a_0)$ en un point donné (b_0, a_0) du demi-plan espace-échelle ne dépend pas de la valeur de la fonction en dehors d'un voisinage de $b_0 \pm \frac{\Delta b}{a}$, ceci à condition que le support de l'ondelette soit bien localisé des deux côtés de Fourier.

Ainsi, si $\hat{\psi}$ est à support compact $\psi \in [x_{\min}, x_{\max}]$, alors la valeur des coefficients d'ondelette $\tilde{f}(b_0, a)$ en un point donné b_0 ne dépend que des valeurs de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[b_0 + ax_{\min}, b_0 + ax_{\max}]$, appelé cône d'influence de l'ondelette ψ au point b_0 (Figure 8a).

De même, si $\hat{\psi}$ est à support compact $\psi \in [k_{\min}, k_{\max}]$, alors la valeur des coefficients d'ondelette $\tilde{f}(b, a_0)$ à une échelle donnée a_0 ne dépend que des échelles de la fonction dans la bande spectrale $[a_0/k_{\max}, a_0/k_{\min}]$ (Figure 8b).

Dans l'absolu aucune fonction ne peut être à support compact des deux côtés de Fourier de par la limitation venant du principe d'incertitude. Cependant en pratique la gaussienne est suffisamment bien localisée des deux côtés de Fourier pour que, en utilisant une ondelette à enveloppe gaussienne, les coefficients d'ondelette gardent une bonne localisation à la fois en espace et en échelle.

Caractérisation de la régularité locale d'une fonction

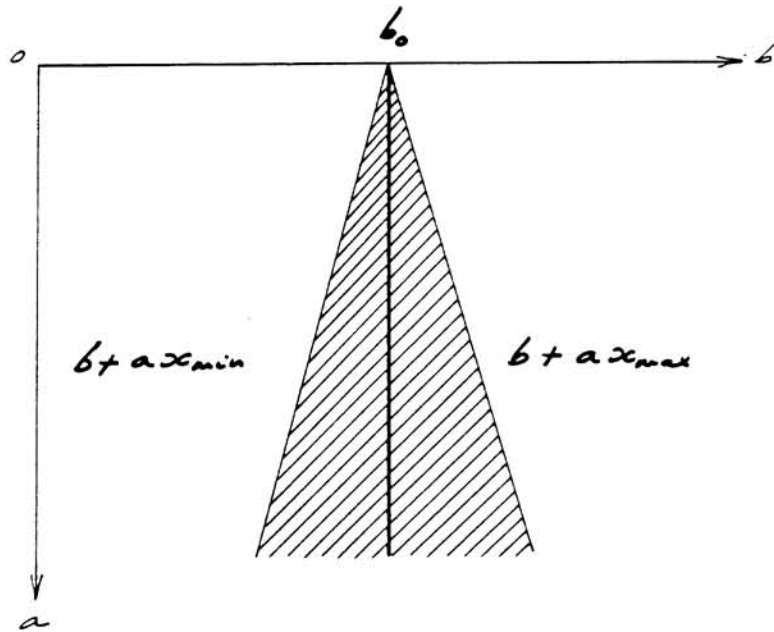
La propriété de la transformée en ondelettes la plus remarquable pour l'analyse des écoulements turbulents est sa faculté de caractériser la régularité locale d'une fonction /Holschneider 1988/, /Holschneider et Tchamitchian 1988/, /Jaffard 1989/. Pour cela il faut choisir une normalisation $N(a) = a$ (30).

Ainsi si $\frac{d^m f}{dx^m}$ existe, c'est-à-dire si f est m fois continuellement dérivable en x_0 , alors:

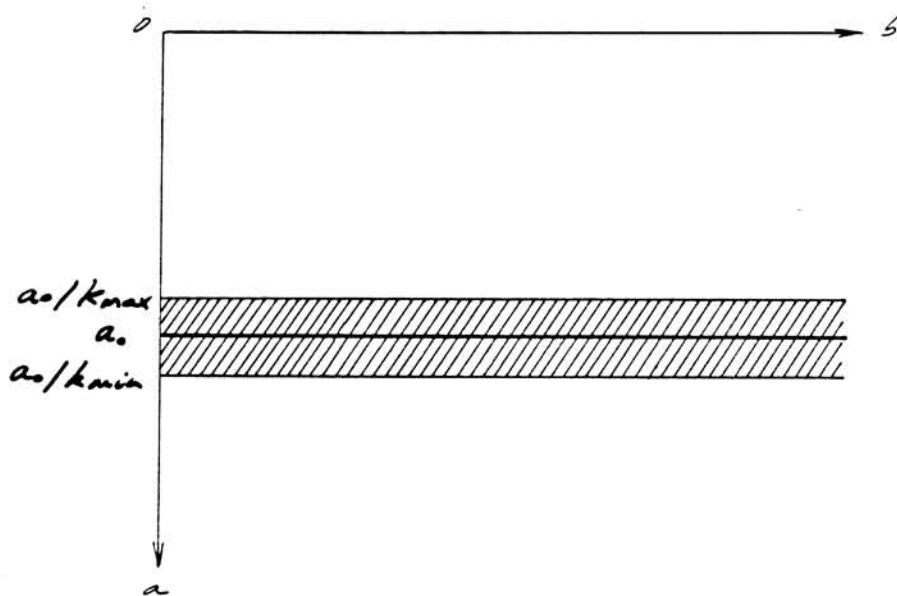
$$(46) \quad \|\tilde{f}(x_0, a)\|_{L^1} \sim a^m$$

quand a tend vers 0.

Si $f \in \Lambda^\alpha(x_0)$, espace des fonctions Lipschitziennes d'exposant $\alpha < 1$, c'est-à-dire l'espace des fonctions continues, non nécessairement différentiables en x_0 , mais telles que:



a. Cône d'influence attaché au point b_0



b. Bande spectrale d'influence attachée au nombre d'onde k_0

Figure 8

Localité dans l'espace des coefficients d'ondelettes

$$(47) \quad f(x) - f(x_0) \leq C |x - x_0|^\alpha$$

avec C , constante > 0 ,

alors

$$(48) \quad \tilde{f}(x_0, a) \sim a^\alpha$$

quand a tend vers 0.

Ainsi la façon dont les coefficients d'ondelette décroissent à petite échelle ($a \rightarrow 0$) en un point x_0 mesure la régularité locale de la fonction en ce point: celle-ci est donnée par la pente du module des coefficients d'ondelette en fonction de l'échelle, représenté en coordonnées Log-Log (Figure 9).

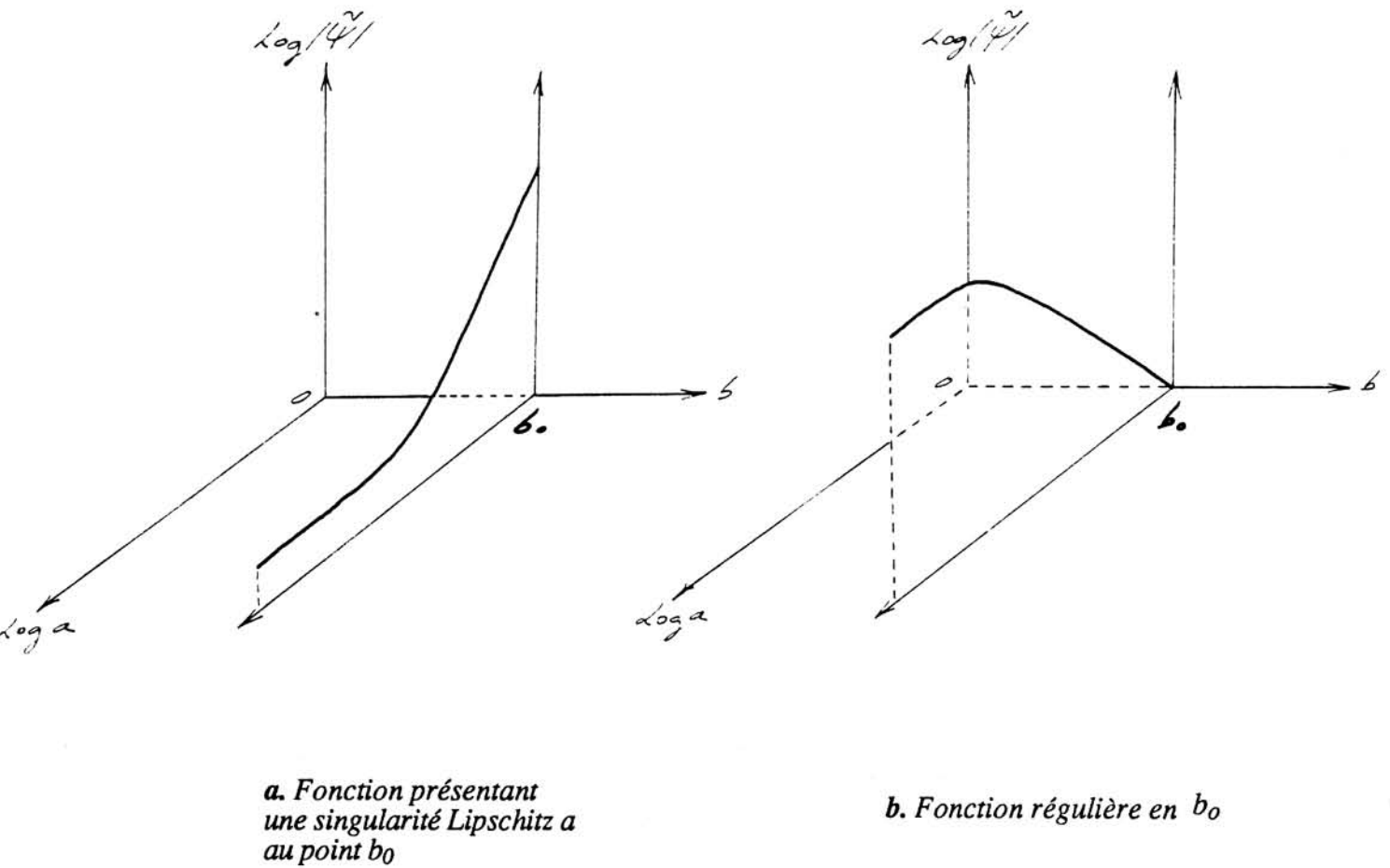


Figure 9

Analyse de la régularité locale d'une fonction au point b_0 en étudiant le comportement à petite échelle du module des coefficients d'ondelettes au point b_0 .

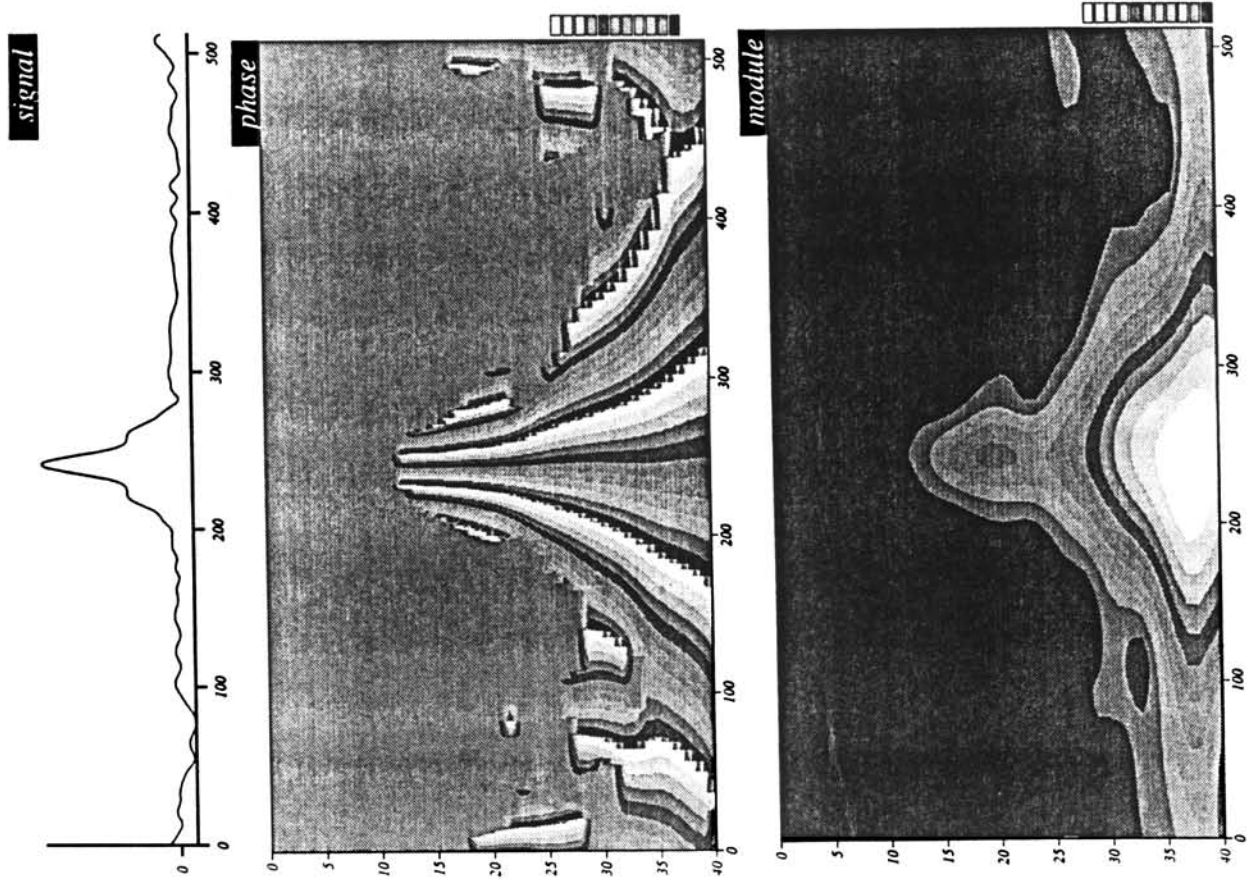
3. Analyse en ondelettes de structures cohérentes

31. Résultats

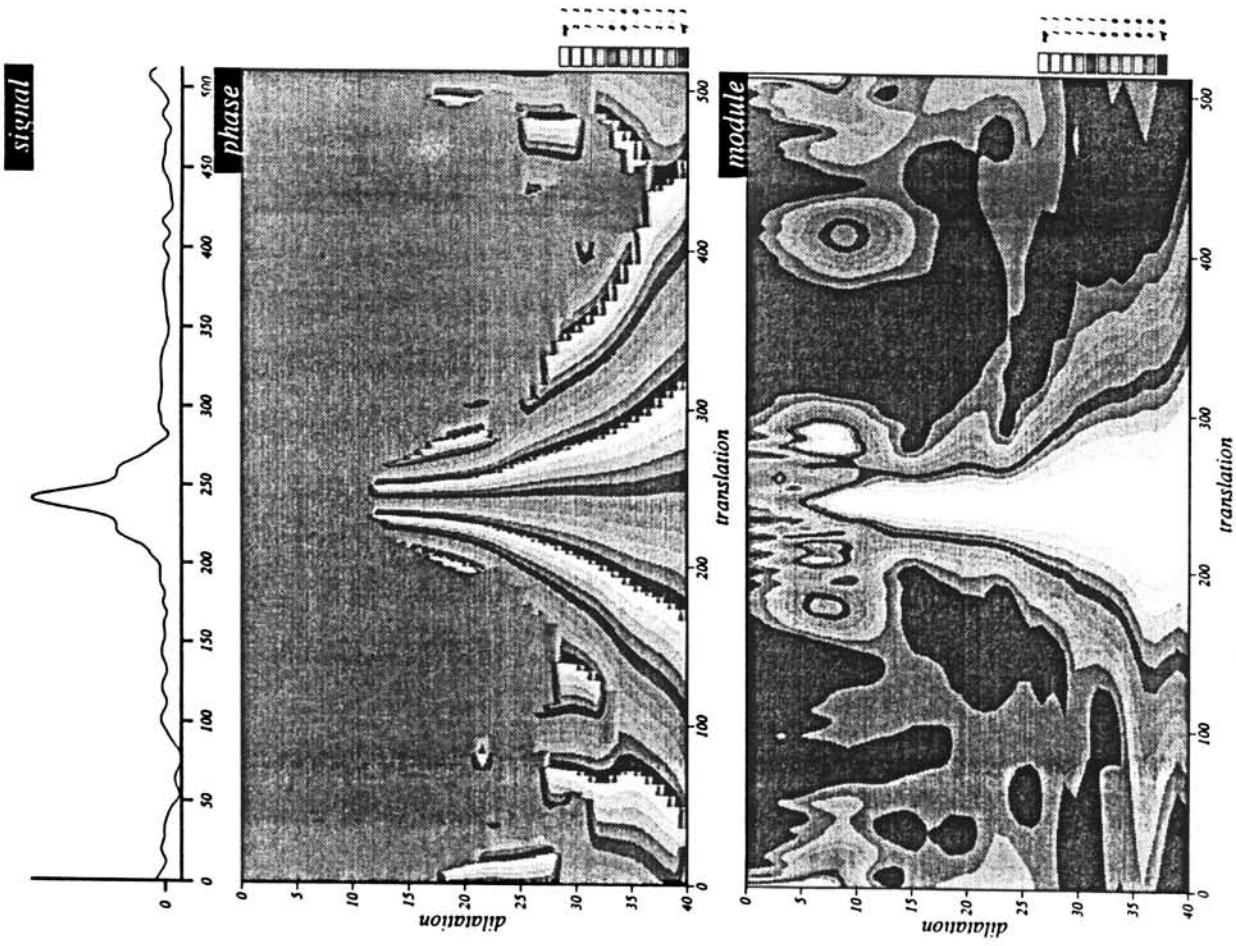
Il faut bien ici comprendre que l'utilisation de la transformée en ondelettes pour l'étude de la turbulence n'a absolument rien de fortuit, relevant plutôt de la mode, mais provient bien d'une nécessité propre à l'évolution actuelle de nos idées sur la turbulence. Si, sous l'effet de l'approche statistique, on avait perdu le besoin d'aller étudier les choses dans l'espace physique, l'avènement des supercalculateurs, et des moyens de visualisation associés, ont révélé une zoologie propre aux écoulements turbulents, à savoir l'existence des structures cohérentes et de leurs interactions élémentaires (cf. **paragraphe 15**), dont la théorie statistique ne tient aucun compte.

Dans les années 1980 je me suis beaucoup investie dans les visualisations des champs observés du côté de l'espace physique, en essayant en particulier de proposer une normalisation pour les représentations afin de faciliter la comparaison entre les résultats obtenus par les expériences numériques et par ceux obtenus en laboratoire, ceci en termes essentiellement morphologiques /Farge 1986/, /Farge 1989/. Avant qu'Alex Grossmann ne me parle pour la première fois des ondelettes en 1984, j'avais envisagé d'effectuer des filtrages passe-bande dans l'espace des coefficients de Fourier bidimensionnels et de reconstruire ensuite dans l'espace physique les champs ainsi filtrés, bande spectrale par bande spectrale, ceci afin d'essayer de mettre en correspondance certaines interactions, observées dans l'espace physique avec les cascades turbulentes prédites par la théorie dans l'espace spectral. Cette méthode cependant posait des problèmes à cause du phénomène de Gibbs qui se produit dans l'espace physique, quand on effectue un filtrage trop abrupt en fréquences. La transformée en ondelettes continue m'a finalement permis de mettre en application ce programme d'analyse des champs turbulents de façon beaucoup plus satisfaisante, mais également plus riche en développements de par les outils mathématiques qu'apportent les ondelettes, en particulier ceux relatifs à l'analyse de la régularité locale d'une fonction (cf. **paragraphe 23**).

Dans un premier temps /Farge et Rabreau 1988/, j'ai tout d'abord effectué des transformées en ondelettes unidimensionnelles en utilisant l'ondelette de Morlet, ceci à partir de coupes de champs de vorticité, résultats de mes simulations numériques d'écoulements turbulents bidimensionnels /Farge 1987/. Celles-ci montrent comment, à partir d'une distribution initiale aléatoire du champs de vorticité, les plus petites échelles de l'écoulement se localisent de plus en plus au cours du temps en se concentrant dans les centres des structures cohérentes (**Figure 10**). Nous avons confirmé ce résultat en effectuant des transformées en ondelettes, cette fois-ci bidimensionnelles, mais toujours avec l'ondelette de Morlet /Farge, Holschneider et Colonna 1990/ (**Figure 11**). La présence des plus petites échelles de l'écoulement dans les c eurs des structures cohérentes, et ce d'autant plus fortement que ces dernières sont déformées par des interactions avec d'autres structures proches, nous a conduit à



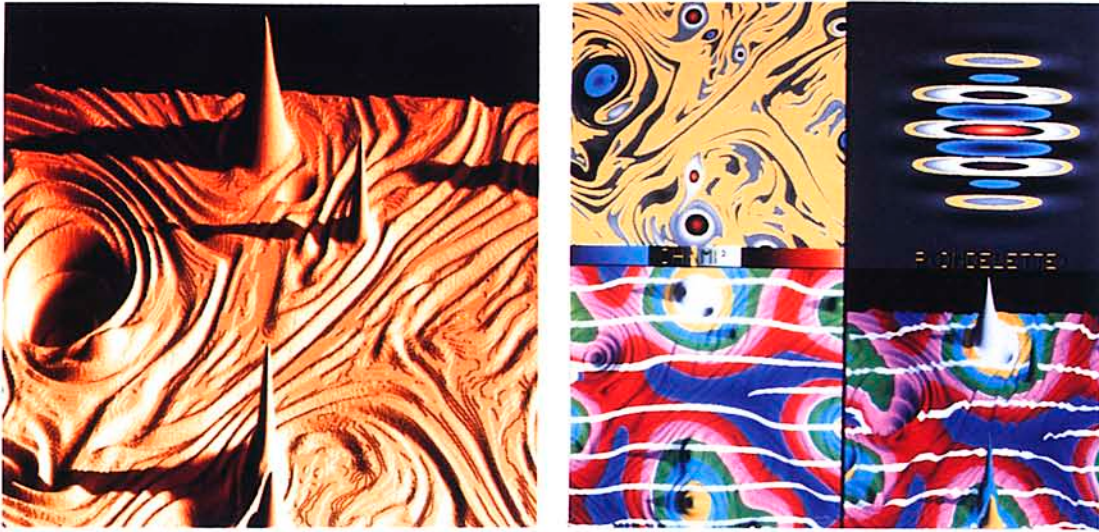
a. Normalisation $a^{-1/2}$



b. Normalisation en $a-l$

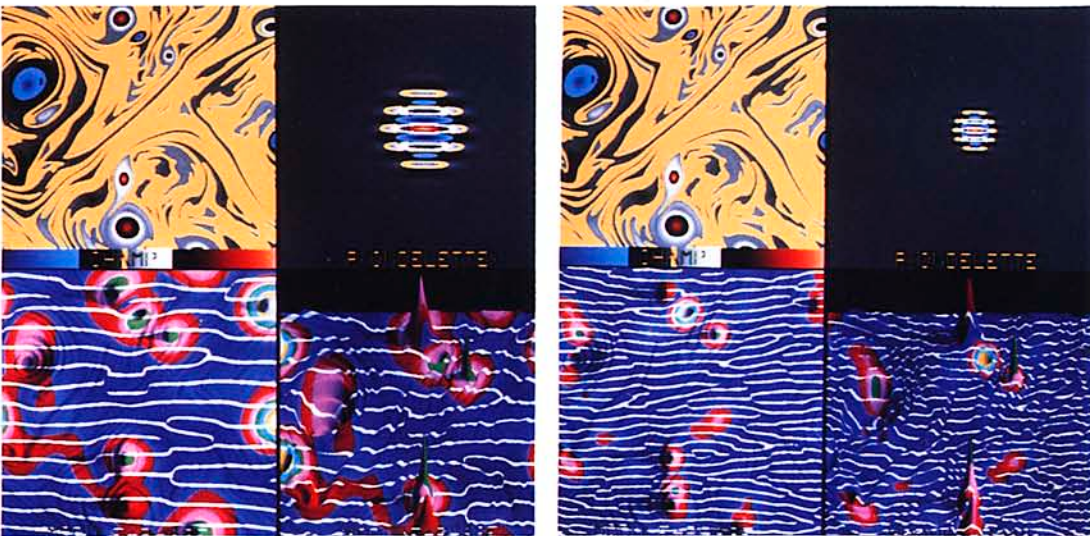
Figure 10

Analyse en ondelettes unidimensionnelles (ondelette de Morlet avec $k_0=5$)
d'une coupe effectuée dans le champ turbulent bidimensionnel
correspondant à la figure 3f



*a. Champ de vorticité à analyser
représenté en vue cavalière*

b. Coefficients d'ondelettes à l'échelle $k = 8$



c. Coefficients d'ondelettes à l'échelle $k = 16$

d. Coefficients d'ondelettes à l'échelle $k = 32$

Figure 11

*Analyse en ondelettes bidimensionnelles (ondelette de Morlet avec $k_0=5$ et $\theta=0$)
du champ turbulent bidimensionnel correspondant à la figure 3f.
Le module est représenté en couleur dans l'ordre de luminance croissante
(bleu, rouge, magenta, vert, cyan, jaune et blanc)
et le zéro de la phase est donné par les isolignes tracées en blanc.*

conjecturer que la dissipation agit également au sein des structures cohérentes, contrairement à l'idée généralement admise. Ceci se confirme quand on compare le champ de Laplacien de la vorticité correspondant au terme de dissipation: les extrema de la dissipation sont bien localisés dans les cœurs des structures cohérentes /Farge, Holschneider et Colonna 1990/. D'ailleurs une dissipation d'ensrophie au niveau de deux structures cohérentes de même signe en interaction forte est nécessaire pour que celles-ci finissent par fusionner, ce qui corrobore bien notre hypothèse.

32. Interprétation

Si nous nous plaçons au voisinage immédiat d'une structure cohérente qui, par définition, est une solution quasi-stationnaire de l'équation d'Euler :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial \omega / \partial t + J(\psi, \omega) = 0 \\ \omega = \nabla^2 \psi \end{array} \right\}$$

et si l'on suppose que localement, dans un voisinage aussi petit que l'on voudra, cette solution est axisymétrique :

$$(50) \quad \begin{array}{l} \omega \sim r^\alpha \\ \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}, \end{array}$$

on déduit les lois d'échelle suivantes /Farge et Holschneider 1990/,

pour la circulation :

$$(51) \quad \Gamma(r) = 2\pi \int_0^r \omega(r') r' dr' \sim r^{\alpha+2},$$

pour l'énergie :

$$(52) \quad \mathcal{E}(r) = 2\pi \int_0^r V(r')^2 r' dr' \sim r^{2\alpha+4},$$

pour l'enstrophie :

$$(53) \quad \Omega(r) = 2\pi \int_0^r \omega(r')^2 r' dr' \sim r^{2\alpha+2}.$$

Pour que ces trois invariants du mouvement restent bornés il faut donc :

$$(54) \quad \alpha \geq -1$$

Une structure cohérente se caractérise par une relation ponctuelle entre la vorticité et la fonction de courant, que l'on appelle fonction de cohérence structurelle, pour laquelle on prédit le comportement :

$$(55) \quad \omega \sim (\psi - \psi_0)^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}$$

ψ_0 étant la valeur de la fonction de courant au centre de la structure cohérente.

Pour finir, en calculant l'énergie dans l'espace des coefficients de Fourier, ce qui est possible de par l'identité de Plancherel, on obtient que la distribution spectrale de l'énergie intégrée sur les couronnes $|\vec{k}| = \text{Constante}$ doit avoir un comportement en loi de puissance de la forme :

$$(56) \quad \mathcal{E}(k) \sim k^{-2\alpha-5}$$

En s'appuyant sur les résultats des expériences numériques de Benzi et al. /1987/, on identifie le coefficient $\alpha = -1/2$, pour lequel on a bien ainsi circulation (51), énergie (52) et enstrophie (53) finies, ce qui donne, au voisinage du centre d'une structure cohérente, les lois d'échelle suivantes:

$$(57) \quad \omega(r) \sim r^{-1/2},$$

$$(58) \quad \omega(\psi) \sim (\psi - \psi_0)^{-1/3},$$

$$(59) \quad \mathcal{E}(k) \sim k^{-4}.$$

La loi (57) correspond à une distribution axisymétrique singulière de la vorticité au centre des structures cohérentes. Il semble probable que de telles structures soient stables vis-à-vis de la dynamique de l'écoulement, car on sait que toute distribution monotone de la vorticité est stable /Arnold 1969/. Une distribution singulière de la vorticité dans les coeurs des structures cohérentes n'est pas en contradiction avec les théorèmes existants /Wolibner 1933/, /Hölder 1933/, /Cottet 1987/ pour les équations d'Euler en dimension 2, qui prédisent que dans un domaine borné ces équations conservent la régularité (au moins $C^{1+\epsilon}$) et la finitude (L^∞) des conditions initiales. Mais ici on se place dans le cas où initialement on a des fonctions ayant une énergie finie (en fait $L^{4-\epsilon}$) présentant des singularités. Or, de par la conservation Lagrangienne de la vorticité (4), si on a des points singuliers initiaux ($\omega(x_0, y_0) = \infty$ à $t = 0$) alors ceux-ci, tout en étant advectés par l'écoulement, doivent rester singuliers pour tout temps ($\omega(x_0, y_0) = \infty$ à $t \rightarrow \infty$).

La loi (58) semble confirmée par des mesures effectuées en laboratoire dans des écoulements de mercure dont la dynamique est contrainte à deux dimensions par la présence d'un champ magnétique /Nguyen Duc et Sommeria 1988/ (**Figure 12**), écoulement où l'on observe, soit une fonction de cohérence structurelle similaire à celle que l'on prédit, soit une loi linéaire, ceci sans modifier les paramètres expérimentaux, mis-à-part les conditions initiales que l'on ne peut contrôler parfaitement. Notre théorie nous permet de proposer l'interprétation suivante de ces résultats : la nature des structures cohérentes observées, caractérisées par la loi spectrale en k^{-4} , dépend des conditions initiales,

- si celles-ci sont **régulières**, la fonction de cohérence structurelle est linéaire, et la distribution de la vorticité est régulière avec une vorticité constante au centre car

$$(60) \quad \omega \sim \frac{\alpha}{\psi^{\alpha+2}} = \psi \quad \text{suppose } \alpha = \infty,$$

- si la distribution initiale présente des **singularités**, l'écoulement s'organise autour de celles-ci et on obtient

$$(61) \quad \omega \sim \psi^{-1/3},$$

ce qui correspond à des structures cohérentes ayant un comportement singulier de la forme

$$(62) \quad \omega \sim r^{-1/2},$$

avec une régularisation de la fonction dans les coeurs des tourbillons, ceci sous l'effet de la dissipation due à la viscosité du fluide. Contrairement à la remarque que nous faisons en introduction du **paragraphe 11**, qui laisse à penser que le comportement de l'équation de Navier-Stokes change dans la limite $\nu \rightarrow 0$, étant donné que ce paramètre se trouve devant le terme d'ordre de dérivation le plus élevé, nous sommes conduits à conjecturer que ν pourrait jouer le même rôle que h , constante de Planck, dans l'approximation classique en mécanique quantique : à grande échelle ce sont les solutions singulières de l'équation d'Euler qui dominent, tandis qu'à des échelles très petites, de l'ordre de V/ν , la dissipation régularise localement ces solutions.

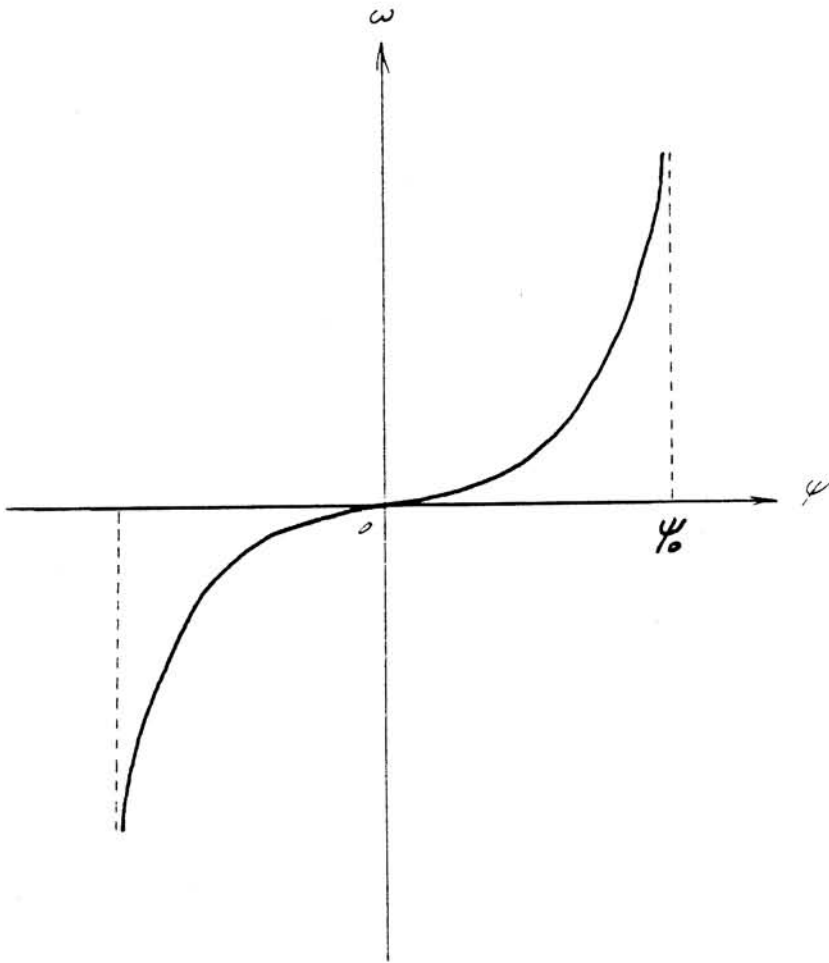


Figure 12

Fonction de cohérence structurale mesurée dans un écoulement bidimensionnel de mercure par Nguyen Duc et Sommeria /1987/ montrant un comportement singulier au centre (ψ_0) des structures cohérentes.

Notre théorie permet également de proposer une nouvelle interprétation des spectres d'énergie des écoulements turbulents, celle-ci étant en termes purement géométriques (ce qui rappelle l'interprétation de Saffman /1971/) et non à partir d'arguments statistiques comme le veut la théorie couramment admise. Ainsi, selon la loi (59), un écoulement présentant diverses structures cohérentes aura-t-il une distribution spectrale d'énergie en k^{-4} si au moins une structure cohérente isolée a un comportement singulier en $r^{-1/2}$, ceci jusqu'aux échelles dissipatives où la viscosité finira par régulariser la fonction ; en effet la pente spectrale est déterminée par la plus forte singularité isolée de l'écoulement. Cette pente en k^{-4} est plus raide que la pente en k^{-3} prédite par la théorie statistique de la turbulence bidimensionnelle /Kraichnan 1967/, /Batchelor 1969/ mais correspond bien aux pentes obtenues dans la plupart des expériences numériques de turbulence bidimensionnelle /Basdevant et al. 1981/, /Mc Williams 1984/, /Farge and Sadourny 1989/, pour lesquelles on choisit comme conditions initiales des spectres d'énergie excités jusqu'à l'échelle de coupure de maillage (**Figure 3a**), ce qui correspond bien à une distribution initiale de vortacité présentant des singularités, les seules expériences numériques qui donnent des spectres en k^{-3} /Brachet et al 1988/ partent de spectres limités en échelle, ce qui correspond à des champs de vortacité initiaux réguliers. Si cette sensibilité aux conditions initiales de la dynamique des équations d'Euler en dimension 2 est confirmée, elle remet en cause l'hypothèse d'un comportement universel des pentes spectrales : l'universalité n'est peut-être pas là où nous le pensons, et n'est-elle pas plutôt à chercher dans la forme des structures cohérentes et dans leurs lois d'interactions élémentaires ?

33. Perspectives

Les applications de la transformée en ondelettes en théorie de la turbulence se développent actuellement selon les trois directions suivantes : analyse, filtrage et intégration numérique. En ce qui concerne l'analyse, la transformée en ondelettes apporte la possibilité de voir au mieux (au principe d'incertitude près) des deux côtés de Fourier à la fois, ce qui devrait permettre de relier, je dirais enfin, la dynamique des structures cohérentes dans l'espace physique à la redistribution de l'énergie entre les différents modes de Fourier. La transformée en ondelettes est en particulier l'outil idéal pour étudier le phénomène d'intermittence, qui est à ce jour l'un des principaux problèmes ouverts en théorie de la turbulence /Frisch et Orszag 1990/. En effet la théorie statistique de Kolmogorov /1941/ suppose que le support des transferts d'énergie est réparti de façon dense dans l'espace physique, ce qui serait vrai par exemple pour une distribution gaussienne des vitesses. Mais diverses expériences de laboratoire /Batchelor et Townsend 1949/, /Anselmet, Gagne, Hopfinger et Antonia 1984/ tendent à infirmer cette hypothèse. De même, en dimension 2, on interprète le fait que les expériences numériques donnent des pentes spectrales plus fortes (de l'ordre de k^{-4}) que celle prédite par la théorie statistique (k^{-3}) en termes d'intermittence des transferts d'entrophie : le support spatial des transferts d'entrophie ne serait pas dense mais diminuerait avec l'échelle, ceci jusqu'aux échelles dissipatives où la viscosité n'agirait alors que sur un sous domaine très petit de l'espace physique. Divers modèles théoriques, toujours fondés sur des considérations probabilistes ad hoc, ont été proposés pour rendre compte de l'intermittence /Kolmogorov 1961/, /Mandelbrot 1976/, /Frisch, Sulem et Nelkin 1978/, /Parisi et Frisch 1985/. La théorie que nous venons de proposer pour interpréter nos résultats, obtenus en effectuant des

transformées en ondelettes de structures cohérentes (cf. **paragraphe 32**), nous permet de donner une interprétation purement géométrique de l'intermittence : celle-ci proviendrait de la forme singulière des structures cohérentes dont le support spatial décroît en loi de puissance avec l'échelle, ceci jusqu'aux échelles dissipatives, qui ne représenteraient qu'un sous-domaine très petit de l'espace physique correspondant aux coeurs des structures cohérentes où le champ de vorticité serait localement régularisé par la dissipation .

La seconde direction, où la transformée en ondelettes pourrait jouer un rôle important pour la turbulence, est la possibilité que l'on entrevoit d'extraire les structures cohérentes du reste de l'écoulement grâce à un filtrage dans l'espace des coefficients d'ondelettes. En effet, ceci permettrait de tester la conjecture que nous avons avancée (cf. **paragraphe 15**) d'après laquelle la dynamique d'un écoulement turbulent bidimensionnel serait essentiellement dominée par les interactions non linéaires entre les structures cohérentes, le reste de l'écoulement n'étant qu'advect   passivement sans intéragir avec celles-ci. Nous venons de tester, grâce à Bruno Torresani et Pier Jean Ponenti du Centre de Physique Théorique du CNRS-Luminy et Richard Kronland-Martinet du Laboratoire de Mécanique et Acoustique du CNRS-Marseille, une technique d'extraction de squelette dans l'espace des coefficients d'ondelette du champ de vorticité, le squelette se définissant comme l'ensemble des points où la dérivée de la phase par rapport à b (paramètre de translation) s'annule. Cette technique, qui a donné des résultats intéressants pour des signaux de type phase stationnaire/Escudié et Torresani 1989/, ne permet pas dans notre cas de séparer aisément les structures cohérentes du reste de l'écoulement, mais l'information apportée par le squelette peut cependant permettre de délimiter les cônes d'influence afin de reconstruire ensuite, à l'aide d'une transformée en ondelettes inverse, un nouveau champ de vorticité ne correspondant qu'à la partie cohérente de l'écoulement. On prévoit ensuite d'effectuer des simulations numériques comparées entre écoulement filtré et écoulement non filtré: si les dynamiques sont semblables notre conjecture sera vérifiée.

Du point de vue analyse numérique cette fois-ci, si notre conjecture est vérifiée, on pourra alors avoir bon espoir de réduire très sensiblement le nombre de degrés de liberté nécessaires pour intégrer numériquement l'évolution d'un écoulement turbulent. En effet, si on définit les degrés de liberté à partir des modes de Fourier, on peut montrer que leur nombre varie comme $Re^{9/4}$ en dimension 3 ou Re en dimension 2, Re étant le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement que l'on veut calculer. Si maintenant il est prouvé que les structures cohérentes sont la partie dynamiquement active de l'écoulement, il sera alors suffisant de ne considérer que les degrés de liberté attachés à ces dernières, que l'on pourra exprimer par exemple grâce à une décomposition sur une base d'ondelettes orthogonales. Ceci devrait permettre de mettre au point de nouveaux algorithmes de type 'Large Eddy Simulation' /Ferziger 1981/, basés cette fois-ci, non sur une séparation entre modes de Fourier de grande échelle calculés explicitement et modes de Fourier sous-maille modélisés statistiquement, mais sur une séparation plus physique entre les coefficients d'ondelettes attachés aux structures cohérentes, qui seront calculés explicitement, et les autres coefficients qui seront paramétrisés globalement pour prendre en compte leur énergie et leur enstrophie.

Remerciement

Je remercie très vivement Matthias Holschneider pour avoir contribué au paragraphz 32., Jean-François Colonna pour les visualisations des figures 1 et 11 ainsi-que Marie-Christine Roos-Cally pour la frappe de ce texte.

Références

- ANSELMET F., GAGNE Y., HOPFINGER E. J. and ANTONIA R. A. 1984
High-order velocity structure function in turbulent shear flows
J. Fluid Mech., **140**, 63-89
- ARNOLD V. I., 1969
Amer. Math. Soc. Transl., **79**, 267-269
- ARGOUL F. ARNEODO A., GRASSEAU G., GAGNE Y., HOPFINGER E. J., FRISCH U., 1989
Wavelet anaysis of turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade
Nature, **338**, n°6210, 51-53
- ARNEODO A., GRASSEAU G. and HOLSCHNEIDER M., 1988
Wavelet transform of multifractals
Phys. Rev., **61**, n° 20, 2281-2284
- BABENKO I. I. and PETROVICH V. V., 1979
Dokl. Akad. SSSR, **245**, 551
- BALIAN R., 1981
Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique
C. R. Acad. Sci. Paris, **292**, II, 1357-1361
- BASDEVANT C., LEGRAS B., SADOURNY R. and BELAND, 1981
A study of barotropic model flows: intermittency, waves and predictability
J. Atmos. Sci., **38**, 2305-2326
- BATCHELOR G. K. and TOWNSEND A. A., 1949
Proc. Roy. Soc., **A199**, 238
- BATCHELOR G. K., 1969
Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence
Phys. Fluids, suppl. II, **12**, 233-239

- BATTIMELLI G. e VULPIANI A., 1982
Kolmogorov, Heisenberg, Von Weizsäcker, Onsager: un caso di scoperta simultanea
Terzo Congresso di Storia della Fisica, Palermo
- BATTLE G. 1987
Ondelettes and phase cluster expansion, a vindication
Comm. Math. Phys., **109**, 417-419
- BENZI R., PATARNELLO G. and SANTANGELO P., 1987
Self-similar coherent structures in two-dimensional decaying turbulence
J. Phys. A, Math. Gen. **21**, 1221-1237
- BEYLKIN G., COIFMAN R. and ROKHLIN V., 1989
Fast wavelet transforms
Preprint, Mathematic Department, Yale University
- BIRKHOFF G., 1962
Hydrodynamics instability
Proc. Symp. Appl. Math., **13**, 55
- BRACHET M. E., MENEGUZZI M., POLITANO H. and SULEM P. L., 1988
The dynamics of freely decaying two-dimensional turbulence
J. Fluid Mech., **194**, 333
Inverse Problems and Theoretical Imaging, Springer
- COUDER Y. and BASDEVANT C., 1986
Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows
J. Fluid Mech., **173**, 225-251
- COTTET G. H., 1987
Analyse numérique des méthodes particulières pour certains problèmes non linéaires
Thèse d'Analyse Numérique, Université Paris VI
- DAUBECHIES I., 1988
Orthonormal bases of compactly supported wavelets
Comm. in Pure and Applied Math., **49**, 909-996
- DAUBECHIES I., KLAUDER J.R. and PAUL T., 1987
Wiener measure for path integrals with affine kinematic variables
J. Math. Phys., **28**
- DUVAL-DESTIN M. and MENU J.P., 1989
Wavelet transform: a new basic spatial operator for visual psychophysics
Submitted to Vision Research
- ESCUDIE B. and TORRESANI B., 1989
Wavelet analysis of asymptotic signals
Preprint, Centre de Physique Théorique, CNRS-Luminy

- FARGE M., 1979
Notes sur la turbulence
Rapport pour le cours de J. M. Levy-Leblond, Université Paris VII
- FARGE M. , 1987
Normalization of high-resolution raster display applied to turbulent fields
'Advances in Turbulence', ed. G. Comte-Bellot and J. Mathieu, Springer, 111-12
- FARGE M. , 1988
Vortex motion in a rotating barotropic fluid layer
Fluid Dynamics Research, 3, North-Holland, 282-288
- FARGE M. , 1990
Imagerie scientifique: choix des palettes de couleurs pour la visualisation des champs scalaires bidimensionnels
L'Aéronautique et l'Astronautique, n° 140, 24-33
- FARGE M., 1990
Evolution des idées sur la turbulence: 1870-1970
*Colloque: '100 ans de rapports entre physique et mathématique',
Revue du Palais de la Découverte*
- FARGE M. and RABREAU G., 1988
Transformée en ondelettes pour détecter et analyser les structures cohérentes dans les écoulements turbulents bidimensionnels
C. R. Acad. Sci. Paris, 307, série II, 1479-1486
- FARGE M. and HOLSCHNEIDER M. , 1990
Interpretation of two-dimensional turbulence spectrum in terms of singularity in the vortex cores
Soumis à Euro. Phys. Lett.
- FARGE M., HOLSCHNEIDER M. and COLONNA J.F., 1990
Wavelet analysis of coherent structures in two-dimensional turbulent flows
'Topological Fluid Mechanics', ed. Moffatt, Cambridge University Press
- FARGE M. and SADOURNY R., 1989
Wave-vortex dynamics in rotating shallow water
J. Fluid Mech., 206, 433-462
- FEDERBUSH P., 1987
Quantum field theory in ninety minutes
Bull. Amer. Math. Soc., July
- FERZIGER J. H., 1981
Higher-level simulations of turbulent flows
Report n° TF-16, NASA-Ames, March 1981

FRISCH U. 1983

Fully developed turbulence and singularities

'Comportement chaotique des systèmes déterministes', *Les Houches*, 36, North Holland, 668-701

FRISCH U. and ORSZAG, 1990

Turbulence: challenge for theory and experiment

Physics Today, January 1990, 24-32

FRISCH U., SULEM P. L., NELKIN M., 1978

A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence

J. Fluid Mech., 87, 719-736

GABOR D., 1946

Theory of Communication

J. Inst. Electr. Engin., 93, III, 429-457

GROSSMANN A. and MORLET J., 1984

Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape

S.I.A.M., J. Math. An., 15, 723-736

GROSSMANN A. and MORLET J., 1985

Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms

'Mathematics and Physics', *Lectures on recent results*, World Scientific Publishing

HEISENBERG W., 1948

Zur statistischen Theorie der Turbulenz

Zeit. für Phys., 124, 628-657

HÖLDER E., 1933

Math. Zeit., 37, 698-726

HOLSCHNEIDER M., KRONLAND-MARTINET R., MORLET J. and TCHAMITCHIAN P., 1988

The "algorithme à trous"

Submitted to IEEE

HOLSCHNEIDER M., 1988

On the wavelet transform of fractal objects

Stat. Phys., 50, n° 5/6

HOLSCHNEIDER and TCHAMITCHIAN, 1988

On the wavelet analysis of the Riemann's function

Preprint, Centre de Physique Théorique, CNRS-Luminy

HUSSAIN A. K. M. F., 1986

Coherent structures and turbulence

J. Fluid Mech., 173, 303-356

JAFFARD S., 1989

Construction of wavelets on open sets

Proceedings of the 1st International Conference on Wavelets, Marseille, 14-18 December 1987,
ed. Combes et al., Springer, 247-252

JIMENEZ J., 1981

The role of coherent structures in modelling turbulence and mixing

Proceedings of the International Conference on Coherent Structures, Madrid, Springer

KATO T. 1972

J. Funct. Anal., **9**, 296

KIM J. and MOIN P., 1979

Large Eddy Simulation of turbulent channel flow

AGARD Symposium on Turbulent Boundary Layers, The Hague

KOLMOGOROV A.M., 1941a

The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers

C.R. Acad. Sc. URSS, **30**, 301-305

KOLMOGOROV A.M., 1941b

On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid

C.R. Acad. Sc. URSS, **31**, 538-540

KOLMOGOROV A.M., 1941c

Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence

C.R. Acad.Sc. URSS, **32**, 16-18

KOLMOGOROV A.M., 1961

A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number

J. Fluid Mech., **13**, 1, 82-85

KRAICHNAN, R.H., 1967

Inertial ranges in two-dimensional turbulence

Phys. Fluids, **10**, 1417-1423

KRAICHNAN R.H., 1971

Inertial-range transfer in two and three-dimensional turbulence

J. Fluid Mech., **146**, 21-43

KRONLAND-MARTINET R., MORLET J. and GROSSMANN A., 1987

Analysis of sound patterns through wavelet transform

Int. J. Pattern Analysis and Artificial Intelligence, **1**, n°2, 273-302

LADYZHENSKAYA O. A., 1963

The mathematical theory of viscous incompressible flow

Gordon and Breach

LANDAU L. D. and LIFCHITZ, 1971
Mécanique des fluides
Edition Mir, Moscou

LIONS J. L., 1969
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires
Dunod-Gauthier Villars

LEMARIE P.G. and MEYER Y., 1986
Ondelettes et bases Hilbertiennes
Rev. Mat. Ibero-americana, **2**, 1

LERAY J., 1933
Etude de diverses équations intégrales non-linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique
J. Mathématiques Pures et Appliquées, **12**, 1-82

LICHTENSTEIN L., 1925
Math. Zeit., **2**

MALLAT S.G., 1989
A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation
IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **II**, n° 7

MANDELBROT B., 1975
Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of carrier
J. Fluid Mech., **62**, 331-358

MANDELBROT B., 1976
Turbulence and Navier-Stokes equation, ed. R. Temam, *Lectures Notes in Mathematics*, Springer, vol. 565, 121

Mc WILLIAMS J. C., 1984
The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow
J. Fluid Mech., **146**, 21-43

MEIRON D. I. and BAKER G. R., 1982
Analytic structure of vortex sheet dynamics. Part 1. Kelvin-Helmholtz instability
J. Fluid Mech., **114**, 283

MOORE D. W., 1979
Proc. Roy. Soc. London, **A365**, 105

MONIN A. S. and YAGLOM A. M., 1975
Statistical fluid mechanics
The MIT Press

MOFFATT H. K., 1990
The topological approach to fluid and plasma flow problems
'Topological Fluid Mechanics', ed. Moffatt, Cambridge University Press, 1-10

- MURENZI R., 1989
Wavelet transforms associated to the N-dimensional Euclidean group with dilatations: signal in more than one dimension
Proceedings of the 1st International Conference on Wavelets, Marseille, 14-18 December 1987, ed. Combes et al., Springer, 239-246
- NGUYEN DUC J. M. and SOMMERIA J., 1988
Experimental characterization of steady two-dimensional vortex couples
J. Fluid Mech., **192**, 175-192
- OBUKHOV A.M., 1941
Energy distribution in the spectrum of a turbulent flow
Izvestiya AN URSS, n° 4-5, 453-466
- ONSAGER L., 1945
The distribution of energy in turbulence
Phys. Rev., **68**, 286
- PARISI G. and FRISCH U., 1985
Turbulence and predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics, ed. M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi, North-Holland, 71-88
- PAUL T., 1989
Wavelets and path integrals
Proceedings of the 1st International Conference on Wavelets, Marseille, 14-18 December 1987, ed. Combes et al., Springer, 204-208
- PERRIER V., 1989
Towards a method for solving partial differential equations using wavelet bases
Proceedings of the 1st International Conference on Wavelets, Marseille, 14-18 December 1987, ed. Combes et al., Springer, 269-283
bmitted to *Annales de l'Institut Henri Poincaré*
- PONENTI P. J., 1990
Turbulence bidimensionnelle incompressible, une analyse des structures cohérentes
Mémoire de DEA de Physique Mathématique, Université de Marseille-Luminy
- REYNOLDS O., 1883
An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels
Phil. Trans. Roy. Soc. London, **174**, 935-982
- ROSE H. and SULEM P. L., 1978
Fully developed turbulence and statistical mechanics
Le Journal de Physique, **39**, n°5
- SAFFMAN P. G., 1971
A note on the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distribution
Stud. Appl. Math., **50**, 377-383

- SARACCO G., GROSSMANN A., TCHAMITCHIAN P., 1989
Use of wavelet transforms in the study of propagation of transient acoustic signals across a plane interface between two homogeneous media
Proceedings of the 1st International Conference on Wavelets, Marseille, 14-18 December 1987, ed. Combes et al., Springer, 139-146
- SCHAEFFER A. C., 1937
Transl. Amer. Math. Soc., **42**, 497
- SULEM C., SULEM P. L., BARDOS C., FRISCH U., 1981
Comm. Math. Phys., **80**, 485
- TEMAM R., 1984
Navier stokes equation
North-Holland
- VAN DYKE M., 1982
An album of fluid motion
The Parabolic Press
- VON NEUMANN J., 1949
Recent theories of turbulence
Oeuvres Complètes, **6**, 437-471
- VON WEIZSÄCKER C. F., 1948
Das Spectrum der Turbulenz bei grossen Reynoldsen Zahlen
Zeit. für Phys., **124**, 628-657
- WEISS J., 1981
The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics
report LJI-TN-121, La Jolla Institute, San Diego
- WOLIBNER W., 1933
Math. Zeit., **37**, 698-726
- ZABUSKY N., 1984
Computational synergetics
Physics Today, July 1984, 2-11