EVOLUTION DES
THEORIES DE
LA TURBULENCE DEVELOPPEE

Marie FARGE

LMD-CNRS
Ecole Normale Supérieure
24, rue Lhomond
75231. Paris Cedex 5

"Comme ceux qui ne comprennent pas la nature des choses sont incapables de rien affirmer sur elles, mais les imaginent seulement et prennent l'imagination pour l'entendement, ils croient donc fermement qu'il y a de l'ordre dans les choses, ignorants qu'ils sont et de la nature des choses et de la leur propre. Lorsque les choses sont disposées de façon que la représentation par les sens nous permette de les imaginer facilement, nous disons qu'elles sont bien ordonnées. Dans le cas contraire nous disons qu'elles sont ou mal ordonnées ou confuses. Et comme les choses que nous pouvons imaginer facilement nous sont plus agréables que les autres, les hommes préfèrent donc l'ordre à la confusion, comme si, en dehors de l'imagination, l'ordre était quelque chose dans la nature"

(Spinoza, Ethique, 1, Appendice)

INTRODUCTION

La turbulence développée est restée jusqu'à présent un problème mal formalisé, sinon mal posé. On ne dispose à ce jour d'aucune théorie complète du phénomène. Celui-ci est trop complexe pour être résolu de façon satisfaisante avec les moyens actuels. Plus exactement, la turbulence développée nous apparaît d'autant plus complexe que les moyens dont nous disposons nous semblent inadaptés. Tout d'abord la mécanique hamiltonienne ne traite que des états stables, ou au voisinage de l'équilibre, et ne décrit que des phénomènes conservatifs, donc réversibles, alors que les écoulements turbulents sont hautement instables et dissipatifs, donc irréversibles; de plus, la dynamique classique a toujours raisonné à partir de systèmes composés de peu d'éléments en interaction et non d'un très grands nombres de degrés de liberté comme c'est le cas en turbulence développée; si on regarde du côté des mathématiques, alors que la résolution des systèmes d'équations linéaires ne pose plus guère de problèmes, elles n'ont pas les moyens de résoudre analytiquement les équations aux dérivées partielles non linéaires décrivant l'évolution des écoulements turbulents, ni même en général celui de prouver l'existence et l'unicité de leurs solutions; enfin, pour comprendre les phénomènes physiques la méthode suivie jusqu'à présent est le plus souvent réductioniste, tandis que l'étude de la turbulence développée demande probablement une vision plus globale, dans la mesure où l'on ne peut plus dans ce cas isoler le comportement d'une partie de celui de l'ensemble Il semble donc encore y avoir, largement, inadéquation entre les moyens conceptuels et techniques actuels, et les caractéristiques intrinsèques aux phénomènes turbulents, ce qui explique le peu d'emprise que nous ayons sur eux.

On définit la turbulence développée comme l'étude des mouvements des fluides dans la limite des très grands nombres de Reynolds. Par *fluide* nous entendons un milieu continu mobile et déformable. Ainsi certains gaz peuvent-ils être traités comme des fluides, ceci à condition que l'hypothèse de continuité reste valable, c'est-à-dire que le gaz soit suffisamment dense. Le *nombre de Reynolds* quant à lui se définit comme le rapport entre le transport moyen du fluide, proportionnel à sa vitesse, et le frottement moyen dû à la viscosité du fluide, ce qui correspond à la partie de l'énergie cinétique qui est dissipée en chaleur sous l'effet du frottement des couches fluides entre elles ou au contact des obstacles solides. L'ordre de grandeur du nombre de Reynolds est de 10^3 à 10^9 pour les écoulements aérodynamiques, de 10^9 à 10^{12} pour les écoulements atmosphériques et de 10^{12} à 10^{20} pour les écoulements astrophysiques. Tant par ses méthodes que par la gamme de nombres de Reynolds étudiés, la turbulence développée est distincte de l'étude de la transition à la turbulence ou de la turbulence faible, abordée par plusieurs articles présentés dans ce livre[1]. La distinction tient en particulier au fait que les écoulements faiblement turbulents présentent un petit nombre de degrés de liberté excités et que leur comportement chaotique est essentiellement temporel, tandis que les écoulements turbulents développés présentent un très grand nombre de degrés de liberté et un comportement chaotique, à la fois spatial et temporel. Ainsi pour les écoulements faiblement turbulents la dimension de l'attracteur caractérisant leur dynamique non linéaire reste-t-elle petite, de l'ordre de 0 et l'on peut dans ce cas leur appliquer les méthodes de la théorie des systèmes dynamiques. La dimension de l'attracteur correspond au nombre de points de l'espace des phases - ensemble de toutes les positions et vitesses accessibles par le système - vers lesquels l'ensemble des solutions tend dans la limite des temps d'évolution très longs. Les outils élaborés par la théorie des systèmes dynamiques s'avèrent par contre inadéquats pour étudier la turbulence développée car la dimension de l'attracteur, bien que bornée par l'effet de la dissipation, tend vers l'infini quand le nombre de Reynolds tend vers l'infini.

Pour caractériser la turbulence développée, nous écarterons volontairement ici les notions d'ordre et de désordre, qui sont, comme l'avait déjà remarqué Spinoza, des notions purement anthropomorphiques, caractérisant essentiellement la facilité que nous avons de représenter un système et de prévoir son comportement. Pour parler de la turbulence développée nous préférons utiliser le concept de 'préditibilité', à savoir la possibilité de prédire plus ou moins bien l'évolution de l'écoulement. Ainsi, si l'écoulement est laminaire, c'est-à-dire non turbulent, son évolution est prévisible et l'information décrivant l'état du système au temps t est suffisante pour connaître l'état de celui-ci pour tout temps. Le seul problème reste alors le fait que pour connaître l'état de l'écoulement au temps t, c'est-à-dire la position et l'impulsion de toutes les particules fluides qui le composent, la quantité d'information nécessaire est énorme et hors d'atteinte de nos appareils de mesure. Il faut donc nous résoudre à ne connaître l'état du système qu'avec une certaine approximation ε. Cette limitation de nos facultés d'observation n'a cependant pas de conséquence sur la préditibilité de l'écoulement si celui-ci est laminaire. En effet dans ce cas, si au temps t on fait une erreur ε quant-à la description de l'état du système, cette erreur reste la même pour tout temps, ou n'évolue que très lentement, car la dynamique d'un écoulement laminaire est stable. Elle n'amplifie pas l'erreur initiale et n'est donc pas *sensible aux conditions initiales.* Si, par contre, l'écoulement est turbulent il en va tout autrement, le système est devenu très instable et

[1] cf article de M. Bergé et M. Dubois

sensible aux conditions initiales, l'erreur ε est amplifiée exponentiellement au cours de l'évolution et le comportement de l'écoulement n'est prévisible que pour un temps d'autant plus court que l'erreur initiale, à savoir la quantité d'information que nous avons négligée, est plus grande. Selon cette vision des choses un écoulement turbulent reste un système qui peut être décrit (pour l'essentiel) par une dynamique *purement déterministe* et l'imprévisibilité que nous avons de son comportement ne tient qu'à des limitations pratiques, et non de principe, à savoir la limitation de la précision de nos appareils de mesure et des moyens de stockage associés. C'est en quelque sorte une imprévisibilité due à la nature limitée de la connaissance humaine et non intrinsèque à la turbulence elle même.

Mais il se pourrait également que l'imprévisibilité des écoulements turbulents provienne d'un comportement fondamentalement *aléatoire* de ceux-ci, dû au caractère intrinsèquement chaotique de leur évolution qui ne serait plus gouvernée par un système dynamique déterministe, mais purement stochastique. Ainsi un tel écoulement créerait-il à chaque instant de son évolution une information nouvelle par quelque tirage au sort "divin" entre les différentes évolutions possibles. Dans ce cas, quelque soit la précision avec laquelle on connaisse l'état du système à l'instant t, on ne peut prévoir son état à l'instant $t+\Delta t$, sinon au mieux la probabilité d'avoir tel ou tel état. Si on cherche à prévoir l'évolution d'écoulements turbulents aussi complexes que celui de l'atmosphère terrestre, nous sommes en quelque sorte confrontés à un *pari pascalien*: la dynamique atmosphérique serait-elle intrinsèquement aléatoire, alors la meilleure prévision que nous puissions faire consisterait à se contenter d'attendre afin d'observer l'état qui sera effectivement réalisé; en effet le plus court programme que l'on peut écrire pour décrire l'évolution d'un système aléatoire, c'est-à-dire dont le comportement est tiré au hasard, consiste à dresser la liste de ses états successifs. Si cette solution ne nous satisfait pas et que nous voulions cependant prédire à l'avance le temps qu'il va faire, nous devons donc parier sur le caractère déterministe, quoique hautement instable et sensible aux conditions initiales, de l'écoulement atmosphérique. Les erreurs de prévision proviennent alors de la description nécessairement approximative que nous pouvons donner de l'état de l'atmosphère au temps t et du fait que la dynamique turbulente va amplifier exponentiellement cette erreur initiale, aussi petite soit-elle. Tout comme quand on fait de la physique on doit parier sur le fait que la nature est gouvernée par des lois et que celles-ci nous sont compréhensibles, de même quand on fait de la prévision météorologique on doit parier sur le caractère déterministe de la turbulence atmosphérique, condition nécessaire à sa préditibilité, même si celle-ci est limitée à des temps très courts.

Au début du 20ème siècle, Poincaré avait déjà bien compris que la dynamique atmosphérique n'est pas aléatoire mais que la difficulté inhérente à la prévision météorologique provient de sa sensibilité aux conditions initiales: *"Pourquoi les météorologistes ont-ils tant de peine à prédire le temps avec quelque certitude? Pourquoi les chutes de pluie, les tempêtes elles-mêmes nous semblent-elles arriver au hasard, de sorte que bien des gens trouvent tout naturel de prier pour avoir la pluie ou le beau temps, alors qu'ils jugeraient ridicule de demander une éclipse par une prière? Nous voyons que les grandes perturbations se produisent généralement dans les régions où l'atmosphère est en équilibre instable, qu'un cyclone va naître quelque par, mais où? ils sont hors d'état de le dire; un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là, et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées. Si on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d'avance, mais les observations n'étaient ni assez serrées, ni assez précises, et c'est pour cela que tout semble dû à l'intervention du hasard."*
En plus de leur impréditibilité intrinsèque, les systèmes déterministes sensibles aux conditions initiales nous semble poser également un sérieux problème de mesure. En effet, qui dit acte de mesure, dit parturbation du système, aussi infime soit-elle, et qui dit sensibilité aux conditions initiales dit amplification de la moindre perturbation: l'acte de mesure sur un tel système doit donc avoir un effet déterminant sur son histoire ultérieure. On retrouve là un problème qui évoqie celui de la mesure en mécanique quantique, où tout acte de mesure affecte le sytème de façon déterminante. A l'ordinateur le problème est différent, mais se retrouve repoussé au niveau du principe d'incertitude attaché à la localisation, spatiale et spectrale, des fonctions analysatrices choisies pour représenter les observables. Nous pensons qu'il y a là des problèmes de principe posés par l'étude des systèmes dynamiques sensibles aux conditions initiales qui mériterait plus ample réflexion.

ELEMENTS D'HISTOIRE

A l'origine la turbulence a probablement été, comme nombre d'autres domaines de la physique, un problème d'ingénieur: comment endiguer le cours d'un fleuve, construire des piles de pont dont la forme résiste mieux à l'écoulement, ou une étrave qui ne crée pas trop de remous? Bientôt elle devint un problème de métaphysicien. Ainsi l'observation des écoulements turbulents servit-elle à fonder des métaphysiques aussi différentes que celle des Taoistes en Orient, pour lesquels le chaos toujours changeant est l'essence du monde et de l'art, ou celle de Lucrèce, dont la physique et la philosophie reposent sur la rencontre désordonnée des atomes. Pour ce dernier, à l'origine est le chaos des atomes tombant dans le vide puis apparaît un écart infime ("clinamen") et les atomes s'arrangent alors en structures macroscopiques variées et changeantes qui constituent le monde matériel que nous observons: *"Sans cet écart, tous, comme des gouttes de pluie, ne cesseraient de tomber à travers le vide immense; il n'y aurait point lieu à rencontres, à chocs, et jamais la nature n'eût pu rien créer"*[2] . Il poursuit en justifiant la liberté au moyen des mêmes arguments: *"Si, par leur déclinaison, les atomes ne provoquent pas un mouvement qui rompe les lois de la fatalité et qui empêche que les cauess ne se succèdent à l'infini, d'où vient donc cette liberté accordée sur terre aux être vivants ?"*[3]

A la Renaissance l'étude de la turbulence devint plutôt un problème d'artiste: comment représenter les flots, les nuages, les fumées, le mouvement des flammes? Faute de modèles satisfaisants certains artistes préferrèrent contourner la difficulté, tel Brunelleschi qui, ne sachant peindre parfaitement les nuages, choisit de remplacer le ciel par un miroir qui reflétait leur image. Mais d'autres apportèrent des réponses plus théoriques. Et là on peut citer l'artiste ingénieur par excellence que fut Léonard de Vinci, dont les croquis et écrits nous révèlent aujourd'hui l'intérêt qu'il portait à la mécanique des fluides, en particulier l'étude des jets, des tourbillons et de l'écoulement des fleuves.

Au 17ème siècle il faut mentionner Descartes qui, dans son ouvrage *Le monde ou un traité sur la lumière,* décrit sa cosmologie d'un univers plein ("plenum") composé

---

[2] Lucrèce, *De Natura Rerum*, livre deuxième, vers 195-232
[3] *Ibid*, vers 233-273

d'une infinité de particules en interaction, où l'on peut voir d'ailleurs une résurgence des idées de Lucrèce. L'ensemble de leurs mouvements et collisions donnaient naissance à des tourbillons qui entraînaient les planètes dans leur course et dont le mouvement rapide au centre etait supposé produire la lumière des étoiles. Il est amusant de penser que si la physique de Descartes avait eu la prééminence sur celle de Newton, nous ne saurions probablement pas encore aujourd'hui expliquer de façon satisfaisante les phénomènes ne mettant en jeu que quelques corps, tel le mouvement des planètes, mais en contre-partie nous aurions probablement une compréhension plus approfondie des phénomènes où un grand nombre d'éléments sont en interaction, telle la turbulence développée.

Avec le 18ème siècle, l'étude des écoulements devint un problème de mécanicien. Les "physicien-mathématiciens" d'alors, parmi lesquels Jean Bernoulli, Daniel Bernoulli, Euler, d'Alembert, Lagrange et Laplace, s'appliquèrent à généraliser les idées newtoniennes au cas des fluides. Ils essayaient par exemple de répondre à des questions aussi ardues que: pourquoi les oiseaux volent-ils? Pour répondre à cette question, fut organisé à Dijon un concours auquel se présentèrent quarante physiciens, parmi lesquels d'Alembert et Daniel Bernoulli. Seule la démonstration de d'Alembert fut jugée parfaite du point de vue mathématique; l'écueil était cependant qu'il démontrait que les oiseaux ne peuvent en aucun cas voler! Ce désaccord entre théorie et expérience était dû au fait que les mécaniciens d'alors ne tenaient pas compte de la viscosité du fluide, ce qui justement permet aux oiseaux de voler!

Le domaine de la mécanique des fluides visqueux ne fut fondée qu'au cours du 19ème siècle par des physiciens tels Navier et Saint-Venant en France, von Helmholtz en Allemagne, Sir George Stokes et Maxwell en Angleterre. Cette génération de mécaniciens des fluides fut suivie par celle des premiers expérimentateurs et théoriciens de la turbulence, parmi lesquels Poiseuille, Reynolds, puis au début du 20ème siècle Bénard, Prandtl, Taylor, von Karman et Lord Rayleigh qui étudièrent expérimentalement la transition entre état laminaire et état turbulent, ainsi que de nombreuses instabilités hydrodynamiques. C'est Taylor et von Karman qui les premiers introduisirent le terme de 'turbulence' en le définissant comme *"un mouvement irrégulier qui apparait dans les fluides, gazeux ou liquides, quand ceux-ci rencontrent des surfaces solides ou même quand des courants du même fluide se rencontrent"*. Ils proposèrent alors les premières théories de la turbulence homogène et isotrope. Il faut mentionner les apports de la théorie des équations aux dérivées partielles, de la théorie des systèmes dynamiques et de celle des processus aléatoires, où s'illustrèrent tout particulièrement les théoriciens de l'école russe[4], parmi lesquels Lyapounov, Pontrjagin, Landau, Kolmogorov, Anosov Ladyshenskaya et Arnold, et ceux de l'école française, où l'on peut citer entre autres Poincaré, Hadamard, Leray, Lévy et Ruelle.

[4]cf. article de S. Diner

PREEMINENCE DE L'APPROCHE STATISTIQUE

L'équation de Navier-Stokes

L'évolution d'un fluide incompressible -masse volumique constante au cours du temps- et newtonien -déformation proportionnelle aux gradients de vitesse- est gouvernée par l' équation de Navier-Stokes qui correspond à la conservation de la quantité de mouvement d'une particule fluide et s'écrit:

(1)

(2)

avec vitesse,

P pression

ρ masse volumique,

résultante des forces extérieures par unité de masse,

ν viscosité cinématique moléculaire,

équations aux dérivées partielles auxquelles s'ajoutent des conditions initiales et des conditions aux limites. Les deux premiers termes de l'équation (1) correspondent au transport des particules fluides par l'écoulement, tandis-que le premier terme du membre de droite correspond à la diffusion, c'est-à-dire à la conversion de l'énergie cinétique en énergie thermique par frottement visqueux. Ainsi le nombre de Reynolds, caractérisant le taux de turbulence de l'écoulement, est-il obtenu en faisant le rapport entre le terme non linéaire de transport et le terme linéaire de diffusion de quantité de mouvement dans la première équation; il mesure donc, de façon adimensionnelle, le taux de non linéarité de l'écoulement. La seconde équation (2) correspond à la condition d'incompressibilité du fluide. Dans le cas des écoulements compressibles, il faut remplacer celle-ci par une équation d'état qui décrit la variation de la masse volumique au cours du temps.

Il faut remarquer que la difficulté mathématique de l'équation de Navier-Stokes provient du fait que le petit paramètre ν, qui tend vers zéro dans la limite des grands nombres de Reynolds, c'est-à-dire des écoulements très turbulents, se trouve devant le terme d'ordre de dérivation le plus élevé qui est le terme de diffusion .

Ainsi le caractère de l'équation, qui est donné par le terme d'ordre de dérivation le plus élevé, change-t-il quand ν tend vers zéro, car dans cette limite c'est le terme de transport qui domine. Dans le cas où la viscosité du fluide est nulle, ce qui correspond à la limite asymptotique où le nombre de Reynolds est infini, l'équation de Navier-Stokes s'apelle alors équation d'Euler et le terme non linéaire de transport n'est plus contrôlé par le terme linéaire de diffusion. De plus l'équation d'Euler conserve l'énergie cinétique tandis-que l'équation de Navier-Stokes dissipe celle-ci, la première est donc réversible en temps tandis-que la seconde est irréversible.

Leray, dans sa thèse de 1933, interprète la turbulence d'un point de vue purement mathématique, comme la perte de la stabilité et de l'unicité de la solution laminaire -pour laquelle le terme de diffusion l'emporte sur le terme de transport- de l'équation de Navier-Stokes à partir d'une *valeur critique* du nombre de Reynolds, valeur au-delà de laquelle apparaissent plusieurs solutions turbulentes dont le comportement n'est plus alors descriptible que statistiquement. Cette interprétation conduit ainsi à deux types de théories de la turbulence: celles qui étudient la stabilité de la solution linéaire faiblement perturbée et s'intéressent alors à la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent en se plaçant dans la limite des faibles nombres de Reynolds, et celles qui appliquent un traitement statistique pour intégrer les équations non linéaires dans le cas où la turbulence est pleinement développée, c'est-à-dire dans la limite des très grands nombres de Reynolds.

Les théories de la stabilité

Le premier type d'approche peut être illustré par la thèse de doctorat d'Heisenberg qui, en 1924, étudia la stabilité d'un écoulement entre deux parois parallèles fixes (écoulement de Poiseuille plan) et évalua la valeur du nombre de Reynolds critique dans ce cas à 5000. Cette approche, largement développée entre 1907 et 1940, avec les travaux de physiciens tels Orr, Lord Rayleigh, Taylor, Hopf et Tollmien, s'avéra plus difficile que prévue et décevante vis-à-vis des vérifications expérimentales. Il apparaissait clairement que le traitement linéaire est insuffisant pour aborder le problème de la turbulence quand celle-ci se développe, car on ne peut plus alors définir d'état quasi-stationnaire permettant de linéariser le problème, sauf cas très particuliers liés à des référentiels appropriés (couches limites, solitons, chocs...).

Les théories statistiques

L'approche statistique remonte à Reynolds qui, à la fin du siècle dernier, émit l'hypothèse que les écoulements turbulents pourraient être décrits en ne considérant que leur comportement moyen, sans avoir à connaître leur comportement détaillé. Pour cela il proposa de décomposer les moyennes d'ensemble des champs turbulents, c'est-à-dire les moyennes effectuées à partir d'un grand nombre de réalisations d'un même écoulement, en une partie moyenne, correspondant à la valeur moyenne de la distribution, et une partie fluctuante, correspondant à son écart-type. Reynolds réécrivit alors l'équation de Navier-Stokes en décomposant ainsi les différents champs et aboutit à une nouvelle équation, dite de Reynolds, qui prédit l'évolution de la partie moyenne du champ de vitesse. Sa résolution pose cependant un problème délicat, appelé problème de 'fermeture', dans la mesure où l'on a besoin de connaître les moments du premier ordre - moyenne du produit des fluctuations de vitesse- qui eux-mêmes sont définis en fonction des moments du second ordre, et ainsi de suite ad infinitum... Où que l'on s'arrête dans la hiérarchie des équations de Reynolds, on aura toujours une inconnue de plus que le nombre d'équations. En 1925 Prandtl proposa une fermeture simple pour résoudre les équations de Reynolds dans laquelle il remplaçait les moments du premier ordre par un terme de 'viscosité turbulente' construit à partir d'une 'longueur de mélange' caractérisant l'échelle des fluctuations de vitesse, ceci par analogie avec la mécanique statistique. En effet, tout comme la diffusion moléculaire régularise les gradients de vitesse aux échelles de l'ordre du libre parcours moyen des molécules, Prandtl, reprenant des idées de Boussinesq, supposa l'existence d'une diffusion turbulente susceptible de régulariser les gradients de vitesse moyenne aux échelles de l'ordre de la longueur de mélange. Le coefficient de transport associé à la diffusion turbulente est la viscosité turbulente, et le rapport entre la viscosité turbulente et la viscosité moléculaire est donné est le nombre de Reynolds : donc plus un écoulement est turbulent et plus ses propriétés diffusives sont importantes. En 1921, Taylor proposa de caractériser les écoulements turbulents, non plus par les valeurs des champs mais par leur fonction de corrélation, qui sont des moyennes faisant intervenir plusiuers points d'espace ou de temps et permettant ainsi d'appréhender les écoulements turbulents à plusieurs échelles, spatiales ou temporelles. Ces travaux de Taylor eurent en particulier une incidence importante sur la formalisation des processus aléatoires effectuée dès la fin des années 30 par Wieuv. Cependant Taylor ne savait comment identifier les fonctions de corrélation à des grandeurs mesurables et ce n'est que 17 ans plus tard qu'il parvint à relier la fonction de corrélation d'ordre deux à la notion de spectre d'énergie -le spectre étant la transformée de Fourier de la fonction de corrélation d'ordre deux-, ce qui lui permit enfin de faire le lien entre les théories statistiques et les expériences de laboratoire, les siennes et celles de von Karman. Le point de vue statistique fut ensuite repris et développé par les théoriciens à partir de 1935 avec les travaux de Gebelein, qui essaya d'appliquer la théorie des probabilités de Kolmogorov à l'hydrodynamique, puis dans les années 1940 par ceux de Kolmogorov et Obukhov en Union Soviétique, d'Onsager aux Etats-Unis, et ceux de von Weizsäcker et Heisenberg en Allemagne.

En 1941 Kolmogorov étudia comment l'équation de Navier-Stokes en dimension trois répartit l'énergie entre les différents degrés de liberté d'un écoulement turbulent développé. Si ce type d'approche est très classique en mécanique statistique, la difficulté en théorie de la turbulence provient du fait qu'un écoulement est un système thermodynamique ouvert, c'est-à-dire non isolé de l'extérieur, à cause des forces agissant sur lui, soit à grande échelle (forces extérieures), soit à petite échelle (forces de frottement visqueux). Les prédictions de la théorie statistique de la turbulence développée se limite donc à une gamme d'échelles intermédiaires, appelée *zone inertielle*, où Kolmogorov suppose que l'énergie est transferée de façon conservative entre les différents degrés de liberté du système, qu'il identifie aux échelles de l'écoulement. Ainsi suppose-t-il que dans cette gamme d'échelles l'écoulement se comporte comme un système thermodynamique isolé, dans la mesure la zone inertielle ne prend en compte ni la très grande échelle où l'énergie est injectée dans le système par les forces extérieures, ni la très petite échelle où l'énergie est extraite par dissipation visqueuse. Il faut remarquer ici que l'existence d'une zone inertielle importante n'est possible que dans le cas de la turbulence pleinement développée, c'est-à-dire pour les très grands nombres de Reynolds, ce dernier pouvant également être vu comme le rapport entre la plus grande et la plus petite échelle de la zone inertielle. De plus, pour que l'approche statistique soit applicable aux systèmes hydrodynamiques, on doit également supposer que ceux-ci sont ergodiques, c'est-à-dire qu'au cours de leur évolution ils parcourent tous les états possibles de l'espace des phases. Il est nécessaire de préciser ici que la correspondance, très partielle, que l'on peut établir entre la mécanique statistique et la mécanique des fluides est d'ordre purement mathématique et indépendante du fait que les fluides sont décrits à l'échelle microscopique par la mécanique statistique.

Donc, en partant de moyennes d'ensemble et en traitant les composantes de la vitesse comme des variables aléatoires au sens de la théorie des probabilités, Kolmogorov proposa que dans la zone inertielle les corrélations de vitesse d'ordre deux varient comme $(\eta l)^{2/3}$, η étant le taux de transfert de l'énergie et l la distance entre deux points caractérisant l'échelle. Sa théorie, communément appelée K41, repose sur les hypothèses suivantes:

- la turbulence est statistiquement homogène, isotrope, autosimilaire et stationnaire, c'est-à-dire qu'elle est invariante par translation, rotation et dilatation spatiales et invariante par translation temporelle, ceci en moyennes d'ensemble et non nécessairement pour chaque réalisation prise séparément,
- les propriétés statistiques ne dépendent que de l'énergie dissipée,
- dans la zone inertielle, l'énergie est transférée sans dissipation et selon un taux constant ε,
- l'écart à la gaussianité de la distribution de probabilité de la vitesse est indépendante de l'échelle l.

L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie remonte aux travaux de Taylor et de von Karman, tandis que celle d'auto-similarité, avait peut-être déjà été perçue intuitivement par Vinci ***(Figure 1)*** et exprimée plus précisément en 1922 par le météorologue anglais Richardson, dans sa paraphrase d'un célèbre poème de Swift, où les puces étaient devenues des tourbillons: *"Les gros tourbillons ont de petits tourbillons, qui se nourissent de leur vitesse, et les petits tourbillons en ont de plus petits, et ainsi de suite jusqu'à la viscosité (au sens moléculaire)"*.

Ignorants les travaux de Kolmogorov publiés en russe en 1941, Heisenberg et von Weizsäcker, lors de leur mise en résidence surveillée à Cambridge en 1945 comme prisonniers de guerre, décidèrent de s'attaquer au problème de la turbulence développée, ceci pour deux raisons : c'était le problème difficile, voire insoluble, par excellence, et il ne nécessitait pas de consulter la littérature antérieure, eux-mêmes n'ayant pas alors accès à aucune bibliothèque. Ils reprirent l'idée de 'viscosité turbulente' émise par Prandtl pour fermer la hiérarchie des équations de Reynolds, mais en les écrivant cette fois-ci directement dans l'espace spectral, c'est-à-dire en termes de modes de Fourier représentés par leur vecteur d'onde dont le module k est inversement proportionnel à l'échelle l. Puis, en utilisant des arguments d'analyse dimensionnelle, ils montrèrent que l'énergie turbulente cascade selon un spectre en loi de puissance de la forme $\eta^{2/3}k^{-5/3}$, résultat semblable à K41, étant donné que le spectre d'énergie est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation d'ordre deux de la vitesse.

Le spectre d'énergie en $k^{-5/3}$ ainsi prédit est bien vérifié expérimentalement, même dans des conditions allant au-delà des hypothèses de Kolmogorov. Cependant, dès 1949, les expériences de Batchelor et Townsend mirent en évidence le phénomène d'intermittence des petites échelles qui se caractérise par le fait que le support spatial des régions actives de l'écoulement, où s'effectuent les transferts d'énergie, décroit avec l'échelle. Cette observation allait dans le même sens que les réserves émises par Landau dès 1942 lors d'un séminaire de Kolmogorov à Kazan; Landau faisait remarquer que les tourbillons ne peuvent pas remplir l'espace de façon dense à toutes les échelles mais que leur support doit diminuer avec celles-ci. Cette remarque.conduisit Kolmogorov en 1961, lors du Colloque International de Mécanique de la Turbulence qui se tenait à Marseilles, à reconsidérer son hypothèse d'auto-similarité et celle de la constance du taux de transfert dans la zone inertielle pour leur substituer l'hypothèse d'une répartition lognormale des fluctuations du taux de dissipation η variant cette fois-ci avec l'échelle, ceci afin de rendre compte du fait que l'intermittence croît quand les échelles deviennent de plus en plus petites.

POUR UNE APPROCHE PLUS MECANISTE ET GEOMETRIQUE

Quels sont les objets et interactions élémentaires caractérisant la turbulence développée?

Dans cette dernière partie, j'ai choisi d'exposer un point de vue personnel, qui n'engage donc que moi-même, concernant l'état actuel de notre compréhension de ce phénomène. Après plus d'un siècle d'étude de la turbulence développée, aucune explication théorique convaincante n'a donné lieu à un consensus parmi les physiciens. Certes il existe un grand nombre de modèles ad hoc, dits 'phénoménologiques', pour lesquels la plupart des paramètres employés ne sont pas prédits par la théorie mais doivent être mesurés à partir d'expériences effectuées sur des maquettes. Ainsi faute de théorie vraiment prédictive de la turbulence développée les modèles phénoménologiques sont-ils encore aujourd'hui largement utilisés par les mécaniciens des fluides pour interpréter le comportement des écoulements turbulents et permettre de calculer les nombreuses applications industrielles où la turbulence joue un rôle souvent crucial, en aérodynamique par exemple. Cependant on ne sait toujours pas si la turbulence développée a bien le comportement universel, c'est-à-dire indépendant des conditions initiales et des conditions aux limites, qu'on lui suppose dans la limite des nombres de Reynolds infiniment grands et des échelles infiniment petites. En 1979, dans un article non publié[5], j'émettais déjà des réserves quant à notre compréhension de la turbulence développée et pensais que l'on n'avait pas encore su dégager les 'bonnes questions'. Dix ans de travail sur le sujet me confirment dans le fait que nous n'avons toujours pas identifié les 'bons objets', j'entends les structures et les interactions élémentaires à partir desquelles on pourra construire une théorie statistique plus satisfaisante.

En effet on dispose actuellement d'une "théorie statistique" de la turbulence développée, mais non d'une "mécanique statistique", et c'est, à notre avis, l'écueil auquel se heurte toute évolution possible de cette théorie. La théorie cinétique des gaz, qui est l'archétype de toute mécanique statistique, est basée sur deux hypothèses, qui sont devenus aujourd'hui faits d'observation (ce qui n'était pas le cas du temps de Boltzmann d'où une polémique acharnée à l'époque); à savoir: l'existence de molécules modélisées

[5]Farge M. 1979, Notes sur la turbulence, rapport pour le cours de Jean-Marc Lévy-Leblond, Université Paris VII

sous la forme de sphères dures, et l'existence d'interactions locales modélisées sous la forme de chocs élastiques entre les molécules. La théorie cinétique des gaz est donc fondée sur un modèle mécanique élémentaire. A celui-ci s'ajoute une troisième hypothèse, aujourd'hui démontrée dans certains cas et infirmée dans d'autres (théorème KAM), dite hypothèse ergodique, qui suppose que le système, avant d'atteindre l'état d'équilibre que va décrire la mécanique statistique, a parcouru tous les états possibles, c'est-à-dire toutes les configurations accessibles de l'espace des phases. Or, dans la formulation actuelle de la théorie statistique de la turbulence développée ces trois hypothèses restent dans un flou assez artistique faute de modèle mécanique sous-jacent. L'équivalent, purement formel, des sphères dures seraient les modes de Fourier ou les "échelles" de l'écoulement turbulent; et les interactions seraient supposées 'locales" entre ces modes. Or *locales* dans l'espace de Fourier implique *non locales* dans l'espace physique. Assez curieusement donc, le modèle implicite, sous jacent à la théorie statistique, voit les écoulements turbulents comme une superposition d'ondes interagissant entre ondes de fréquences voisines, ceci de façon parfaitement délocalisée dans l'espace physique. De plus, l'hypothèse ergodique que l'on doit postuler pour avoir des états statistiquement représentatifs n'est pas démontrée pour les écoulements turbulents, sauf cas très particuliers. Pour finir la notion de viscosité turbulente, introduite par analogie avec la mécanique statistique, ne peut se justifier que si l'on suppose une importante séparation d'échelles entre les mouvements microscopiques et ceux macroscopiques; or de toute évidence les mouvements turbulents se rencontrent à toutes les échelles de la zone inertielle, sans qu'il y ait séparation entre elles, et de plus les interactions semblent avoir lieu de façon préférentielle entre échelles voisines. En toute rigueur la notion de viscosité turbulente n'est donc pas fondée, bien qu'elle soit à ce jour très largement utilisée en pratique pour modéliser les écoulements turbulents, ceci aussi bien pour les calculs industriels que dans les théories analytiques plus récentes, utilisant les techniques du groupe de renormalisation, importées du domaine de l'électrodynamique quantique par Kraichnan dès 1958 et développées actuellement par Yakhot et Orszag.

Un préalable à la formulation d'une mécanique statistique de la turbulence nous semble être l'identification des 'objets' élémentaires et de leurs interactions: par objets élémentaires nous entendons les constituants de l'écoulement qui confinent l'essentiel de l'énergie cinétique et constituent la part dynamiquement active de l'écoulement et donc conditionnent l'évolution de celui-ci. Mais la question qui se pose à ce stade est celle de l'*universalité* de la turbulence développée: les 'objets' élémentaires seront-ils les mêmes, ou au moins comparables, quelque soit le type d'écoulement turbulent ? Pour répondre à cette question, préalable à toute avancée théorique, il faut oeuvrer tels les chimistes du 19ème, en effectuant un travail fastidieux qui tombe vite dans l'oubli de l'histoire, à savoir identifier pour un très grand nombre d'écoulements turbulents ces 'objets' et interactions élémentaires, puis essayer de les regrouper en une classification générale. Deux démarches, en fait complémentaires, sont alors possibles: celle du chimiste 'analytique', qui inventorie les molécules que l'on rencontre à l'état naturel en étudiant un très grand nombre de réactions chimiques, et celle du chimiste de "synthèse" qui, en combinant différents atomes, forme de nouvelles molécules. Par analogie, pour étudier la turbulence développée on peut procéder selon les deux démarches suivantes: soit on analyse un très grand nombre de réalisations du même écoulement pour dégager les modes propres dominants[6], soit on observe quelles sont les structures, les 'molécules' de turbulence, qui se forment sous l'effet de la dynamique turbulente quand on part de fonctions élémentaires, encore à définir[7], qui joueraient ainsi le rôle d'atomes. Ces deux démarches, essentiellement expérimentales, peuvent être effectuées aussi bien en laboratoire qu'à partir d'expériences numériques calculées à l'ordinateur. Nous pensons que pour mieux comprendre la turbulence développée, parallèlement à la théorie statistique qui travaille à partir de moyennes d'ensemble, il est important de chercher à identifier les 'objets' dynamiques élémentaires et d'élucider les mécanismes en jeu, en particulier la formation et l'évolution des structures cohérentes, ceci en étudiant chaque réalisation de l'écoulement prise séparément. Ce n'est que dans un second temps que l'on pourra alors définir de nouveaux types de moyennes mieux adaptées à la modélisation de la dynamique des écoulements turbulents développés.

La turbulence bidimensionnelle

A titre d'exemple, on peut illustrer cette démarche en prenant le cas de la turbulence bidimensionnelle, dont l'étude est très importante pour la modélisation, la simulation et la prévision des écoulements géophysiques à grande échelle, tels ceux que

---

[6] Ceci peut se faire à l'aide par exemple de techniques du type Karhunen-Loève, encore appelée 'Proper orthonormal Decomposition' (Lumley J. L. 1981, Coherent Structures in Turbulence in *Transition and Turbulence*, ed. R. E. Meyer:215-241, Academic), ou en utilisant les paquets d'ondelettes (Farge M. 1992, Wavelet Transforms and Applications to Turbulence in *Annual Review of Fluid Mechanics*, **24**:395-457).

[7]Parmi les candidats possibles il y a les ondelettes qui sont des fonctions bien localisées à la fois dans l'espace physique, c'est-à-dire en position, et dans l'espace spectral, c'est-à-dire en échelle (Farge M. 1992, Wavelet Transforms and Applications to Turbulence in *Annual Review of Fluid Mechanics*, **24**:395-457).

l'on rencontre en météorologie ou en océanographie. L'étude de la turbulence bidimensionnelle présente aussi l'avantage d'être beaucoup plus accessible aux expériences numériques effectuées à l'ordinateur que l'étude de la turbulence tridimensionnelle car elle permet, à puissance de calcul égale, d'atteindre des nombres de Reynolds beaucoup plus élevés.

L'idée de turbulence bidimensionnelle fut longue à s'imposer, car on pensait la turbulence directement liée à l'étirement des tubes de tourbillon par les gradients de vitesse, mécanisme qui en dimension trois assure le transfert de l'énergie vers les petites échelles, mais est inhibé en dimension deux à cause de la conservation du tourbillon. La turbulence bidimensionnelle a cependant en commun avec la turbulence tridimensionnelle la dynamique non linéaire à l'origine du caractère chaotique et impréditible de sa structure macroscopique. Elle a aujourd'hui acquis droit de cité, dans la mesure où elle permet de rendre compte de la dynamique des écoulements géophysiques à grande échelle, rendus bidimensionnels par l'effet conjugué d'une stratification stable et d'une forte rotation du référentiel. On peut aussi conjecturer que dans certains écoulements tridimensionnels les régions à fort gradient s'organisent en nappes, pour lesquelles le produit du tourbillon par le gradient de vitesse s'annule, donnant ainsi localement un comportement du type turbulence bidimensionnelle.

La théorie statistique de la turbulence bidimensionelle est dûe à Kraichnan, Leith et Batchelor qui, en suivant un raisonnement similaire à celui de Kolmogorov, montrèrent qu'en dimension deux il y a, non plus une cascade directe d'énergie, mais une cascade directe d'un second invariant, l'enstrophie -intégrale du carré du tourbillon-, cette fois-ci selon un spectre proportionnel à k^{-3}, et non $k^{-5/3}$ comme en turbulence tridimensionnelle; la conservation de l'enstrophie est due à la conservation du tourbillon provenant du fait qu'en dimension deux le tourbillon et le gradient de vitesse sont orthogonaux. Ainsi, bloquée par la conservation de l'enstrophie, l'énergie, au lieu d'être transférée vers les petites échelles comme en turbulence tridimensionnelle, remonte-t-elle vers les grandes échelles, donnant lieu à une 'cascade inverse', ce que Kraichnan a interprété, par analogie avec la thermodynamique, comme l'apparition d'une 'température négative'. Cette remontée de l'énergie vers les grandes échelles avait été prévue dès 1953 par Fjörtoft et Onsager. Il faut cependant remarquer qu'en toute rigueur la théorie statistique ne peut pas s'appliquer aux écoulements turbulents bidimensionnels dans la mesure où la présence d'invariants du mouvement, propres au cas bidimensionnel, invalide l'hypothèse ergodique, ce qu'avait déjà signalé von Neumann en 1949 dans un article de revue sur la turbulence développée, qui est encore à ce jour le meilleur que je connaisse sur la question et dont je recommande vivement la lecture[8].

Les structures cohérentes

La théorie statistique de la turbulence développée, de par son raisonnement en termes de fonctions de corrélation ou de modes de Fourier, donc de quantités moyennées dans l'espace, élude toute information sur la structure locale de l'écoulement. Si, sous l'effet de l'approche statistique, on avait ainsi perdu le besoin d'aller étudier les choses dans l'espace physique, l'avénement des supercalculateurs et des moyens de visualisation associés a révélé une zoologie propre aux écoulements turbulents, à savoir l'existence des structures cohérentes, dont la théorie statistique ne tient aucun compte. Les structures cohérentes sont des condensations du champ de 'vorticité', c'est-à-dire le rotationnel du champ de vitesse, qui confinent en leur sein la majeure partie de l'énergie et de l'enstrophie des écoulements turbulents. Elles ont été mises en évidence à la fois par des expériences effectuées en laboratoire et par des expériences numériques effectuées à l'ordinateur à partir des équations fondamentales de la mécanique des fluides. Si les structures cohérentes sont aujourd'hui bien identifiées pour les écoulements bidimensionnels, elles sont également observées au sein d'écoulements tridimensionnels, en particulier les tourbillons 'en épingle à cheveux' (horse-shoe vortices), mais, leur topologie étant alors beaucoup plus complexe, elles sont dans ce cas plus difficiles à identifier et à étudier.

Qu'est-ce qu'une structure cohérente ? Nous ne disposons pas actuellement de théorie pour caractériser celles-ci de façon précise, aussi doit-on se contenter d'une description qualitative, qui relève plus de la démarche du zoologue que de celle habituelle au mécanicien des fluides. Mais c'est une étape taxonomique et descriptive nécessaire et préalable à toute théorisation. Nous pouvons, en première approximation, caractériser les structures cohérentes de la façon suivante :

- ce sont des structures tourbillonnaires, c'est-à-dire des régions de l'écoulement pour lesquelles la rotation l'emporte sur la déformation,
- elles confinent en leur sein l'essentiel de l'énergie et de l'enstrophie de l'écoulement,
- elles se forment spontanément par une condensation du champ de vorticité sous l'effet de la dynamique turbulente,

[8]Von Neumann J. 1949, Recent Theories of Turbulence, Oeuvres Complètes, **6**:447

- elles se rencontrent sur une large gamme d'échelles, en fait tout le long de la zone inertielle,
- elles survivent sur des échelles de temps bien supérieures au temps moyen de retournement des tourbillons choisi par la théorie statistique comme temps caractéristique des transferts turbulents. Quand on étudie la dynamique des structures cohérentes on peut distinguer les états et les interactions élémentaires suivantes :
- état relaxé et axisymétrique ***(Figure 2a)*** en l'absence d'autre structure cohérente proche,
- états faiblement excités, caractérisés soit par une déformation ***(Figure 2b)*** sous l'effet d'une structure cohérente voisine de même intensité, soit par l'émission d'un filament de vorticité ***(Figure 2c)*** quand la déformation devient trop forte,
- états fortement excités, caractérisés soit par la liaison ***(Figure 2d)*** de deux structures cohérentes de signes opposés et d'intensités comparables, soit par la fusion ***(Figure 2e)*** de deux ou plusieurs structures cohérentes de même signe.

En suivant une méthode proposée en 1981 par Weiss, on peut, moyennant certaines hypothèses[9], séparer l'écoulement en deux types de régions où la dynamique est de nature intrinséquement différente différente:
- des *régions elliptiques*, où la rotation domine la déformation et pour lesquelles deux particules fluides initialement voisines le restent pour tout temps, leur écart n'oscillant que légèrement au cours de l'évolution, ces régions sont associées aux structures cohérentes géométriquement stables,
- des *régions hyperboliques*, où la déformation domine la rotation et pour lesquelles deux particules fluides initialement voisines s'écartent exponentiellement au cours du temps, leur écart se contractant dans une direction et se dilatant dans l'autre direction, ces régions sont associées aux filaments de vorticité formant l'écoulemnt résiduel servant de toile de fond au mouvement des structures cohérentes. C'est, à notre avis, la présence de structures cohérentes et leur forme convexe - par analogie avec le billard de Sinaï[10]- qui rend la dynamique des écoulements turbulents sensible aux conditions initiales et donc difficilement préditibles. Or on rencontre là un paradoxe similaire à celui dont parle Yoccoz[11]: ce seraient ainsi les régions elliptiques stables, à savoir les structures cohérentes, qui seraient à l'origine de l'impréditibilité des écoulements turbulents et non les régions hyperboliuqes instables, à savoir l'écoulement résiduel formé de filaments de vorticité. Ces derniers pourraient être négligés ou modélisés par quelque processus stochastique ad hoc, leur position n'ayant pas vraiment d'importance, alors que la dynamique des structures cohérentes,

---

[9]On doit en particulier supposer que les variations spatio-temporelles du tenseur de cisaillement de vitesse sont lentes par rapport à celles du rotationnel de la vorticité
[10]cf. article de Sinaï
[11]cf. article de Yoccoz

et plus particuliérement leur position, devrait être calculée le plus exactement possible si l'on veut sauvegarder, au moins pour les temps courts, la préditibilité de l'écoulement.

Les simulations numériques suggèrent d'ailleurs que la dynamique des écoulements turbulents bidimensionnels est essentiellement dominée par les interactions entre les structures cohérentes qui brassent l'écoulement résiduel, formé par les filaments de vorticité émis lors des interactions et qui pour leur part ne semblent jouer qu'un rôle passif.

Il semble que l'intermittence que l'on observe dans les simulations numériques, qui se caractérise par le fait que les pentes spectrales obtenues (k^{-4} à k^{-6}) sont nettement plus fortes que celle prédite par la théorie statistique (k^{-3}), provienne de la répartition spatio-temporelle des structures cohérentes et de leurs interactions. Nous pensons que l'intermittence pourrait également s'expliquer par la forme quasi-singulière de certaines structures cohérentes en 'cusps' dont le support spatial décroit en loi de puissance avec l'échelle, ceci jusqu'aux échelles dissipatives[12]. Toutes ces considérations de type géométrique peuvent également s'appliquer dans le cas des écoulements tridimensionnels. Nous avons en particulier montré que pour des écoulements de type couche de mélange tridimensionnelle on observe une forte intermittence et que celle-ci provient de la présence de tubes de vorticité secondaires tridimensionnels fortement étirés par les tourbillons primaires bidimensionnels.

Paragraphe à compléter

Si la conjecture, selon laquelle seules les structures cohérentes sont dynamiquement actives, est vérifiée, on pourra alors avoir bon espoir de réduire très sensiblement le nombre de degrés de liberté nécessaires pour intégrer numériquement l'évolution d'un écoulement turbulent. En effet, si on définit les degrés de liberté de l'écoulement à partir des modes de Fourier comme le fait la théorie statistique, on peut montrer que leur nombre varie comme $Re^{9/4}$ en dimension 3 ou Re en dimension 2, Re étant le nombre de Reynolds caractérisant le taux de turbulence que l'on veut calculer. Si maintenant il est prouvé que les structures cohérentes sont la partie dynamiquement

---

[12] Farge M. and Holschneider M. 1991, Interpretation of two-dimensional turbulence energy spectrum in terms of quasi-singularity in some vortex cores, *Europhysics Letters*, **15**(7):737-743
Farge M., Holschneider M. et Philipovitch T. 1991, Formation et stabilité des structures cohérentes quasi-singulières en turbulence bidimensionnelle, soumis aux *Comptes-Rendus de l'Acad. Sci. Paris*

active de l'écoulement, il sera alors suffisant de ne considérer que les degrés de liberté attachés à ces dernières, que l'on peut exprimer par exemple grâce à une décomposition sur une base d'ondelettes orthogonales[13]. Ceci devrait permettre de mettre au point de nouveaux algorithmes, basés cette fois-ci, non sur une séparation entre modes de Fourier de grande échelle calculés explicitement et modes de Fourier de petite échelle modélisés statistiquement, mais sur une séparation plus physique entre les coefficients attachés aux structures cohérentes, qui seront calculés explicitement, et les coefficients attachés à l'écoulement résiduel qui seront paramétrisés, ceci localement dans l'espace physique et indépendemment d'une séparation arbitraire entre échelles de tailles différentes.

CONCLUSION

Paragraphe à compléter

[13]Farge M., Wickerhauser V., Meyer Y., Goirand E. 1991, Improved predictability of two-dimensional turbulent flows using wavelet packets compression, to appear in *Fluid Dynamic Research*

Bibliographie

Von Neumann J. 1949
Recent theories of turbulence
Oeuvres Complètes, 6: 447