



Contrat CEA/EURATOM
Rapport final, 1^{ère} année, 2001

**Analyse en ondelettes de signaux de plasmas de bord,
et extraction des événements cohérents**

Marie Farge¹, Kai Schneider²,
& Pascal Devynck⁴

¹Directeur de Recherche, LMD-CNRS, Ecole Normale Supérieure, Paris, France

²Professeur, CMI, Université de Provence, Marseille, France

⁴Chercheur, CEA, Cadarache

Table des matières

INTRODUCTION.....	2
<i>MOTIVATION.....</i>	<i>2</i>
<i>PROGRAMME DE TRAVAIL.....</i>	<i>3</i>
<i>PRÉSENTATION DU RAPPORT.....</i>	<i>3</i>
ANALYSE EN ONDELETTES.....	5
<i>PRINCIPE.....</i>	<i>5</i>
<i>DÉFINITION.....</i>	<i>6</i>
<i>ONDELETTES CONTINUES.....</i>	<i>6</i>
<i>PROPRIÉTÉS.....</i>	<i>7</i>
<i>ALGORITHME.....</i>	<i>8</i>
<i>ONDELETTES DISCRÈTES.....</i>	<i>8</i>
<i>ONDELETTES ORTHOGONALES.....</i>	<i>9</i>
ANALYSE DE SIGNAUX ACADEMIQUES.....	14
<i>ANALYSE EN ONDELETTES CONTINUE.....</i>	<i>14</i>
<i>ANALYSE EN ONDELETTES ORTHOGONALES.....</i>	<i>22</i>
EXTRACTION DES EVENEMENTS COHERENTS.....	26
<i>PRINCIPE.....</i>	<i>26</i>
<i>ALGORITHME ITÉRATIF.....</i>	<i>26</i>
<i>DÉBRUITAGE DE SIGNAUX ACADÉMIQUES.....</i>	<i>27</i>
<i>.....</i>	<i>28</i>
SIGNAUX DE PLASMAS DE BORD.....	37
<i>TOKAMAK TORE-SUPRA, CADARACHE.....</i>	<i>37</i>
<i>MACHINE TORIQUE BLAUMANN, TRONDHEIM.....</i>	<i>44</i>
<i>TOKAMAK CASTOR, PRAGUE.....</i>	<i>53</i>
CONCLUSION.....	74
REFERENCES.....	77

INTRODUCTION

Motivation

Les simulations de transport radial dans les tokamaks, basées sur différents modèles de turbulence, font toutes apparaître que, à côté d'un transport turbulent radial de type diffusif, il existe un transport purement convectif qui met en jeu des échelles radiales de plusieurs longueurs de corrélation.

Ces deux types de transport peuvent rendre compte d'une partie non négligeable de la chaleur et de la matière transportées du plasma vers les parois du tokamak. Il est donc très important, d'une part de les mettre en évidence sur les signaux expérimentaux, et d'autre part de les quantifier. Pour cela nous disposons de

différents signaux de turbulence mesurés au bord du plasma de plusieurs machines, qui peuvent nous apporter des informations sur les deux dynamiques de transport mises en jeu.

Nous proposons d'analyser ces signaux grâce à la transformée en ondelettes, qui permet de représenter ceux-ci à la fois en temps et en échelles temporelles. Cette transformée est préférable à celle de Fourier car le signal mesuré par les sondes de Langmuir est fondamentalement non stationnaire.

Programme de travail

Pour chaque signal traité, nous utilisons d'abord la transformée en ondelettes continue à valeurs complexes pour analyser le comportement instationnaire des signaux temporels acquis par les sondes de Langmuir. Ceci nous permet d'étudier la distribution d'énergie, en temps et en échelle, et de détecter la présence éventuelle d'événements cohérents.

Nous utilisons ensuite la transformée en ondelettes orthogonales pour projeter le signal en temps et en échelle. Nous filtrons les coefficients d'ondelettes de façon non linéaire avant de revenir dans l'espace physique par transformée inverse. Ceci nous permet de décomposer chaque signal en une contribution cohérente, qui retient les événements cohérents intermittents, et en une contribution incohérente, qui correspond à un bruit non intermittent.

Pour finir, nous effectuons différentes analyses statistiques sur chacune des contributions cohérente et incohérente pour vérifier a posteriori que nous avons bien extrait des contributions de nature différente.

Présentation du rapport

Ce rapport est le rapport final pour l'année 2001 du contrat signé entre le CEA-EURATOM de Cadarache et l'ENS de Paris concernant l'étude des plasmas de bord à l'aide de la transformée en ondelettes. Il concerne la suite du travail présenté dans les deux rapports précédents (Progress reports).

Dans le premier rapport, nous avons traité trois signaux provenant de différentes machines servant à chauffer et à confiner un plasma : le torsiatron TJK de Kiel (Allemagne), les tokamaks Castor de Prague (Tchéquie) et Tore-Supra de Cadarache, ainsi qu'un signal calculé par simulation numérique à l'aide d'un code PIC (Particle In Cell).

Dans le second rapport, nous avons développé une nouvelle méthode d'extraction des structures cohérentes basée sur un algorithme itératif de débruitage en ondelettes orthogonales, que nous avons appliquée à un signal de Tore-Supra.

Dans ce rapport final nous détaillerons les méthodes d'analyse et d'extraction des événements cohérents que nous avons développées et présenterons les résultats du traitement de trois nouvelles séries de signaux provenant des machines suivantes : le tokamak Tore-Supra à Cadarache, la machine torique Blaumann de Trondheim (Norvège) et le tokamak Castor de Prague (Tchéquie).

Dans la première partie, nous décrirons les méthodes d'analyse en ondelettes continues et en ondelettes orthogonales que nous allons utiliser. Nous illustrerons l'intérêt de celles-ci sur quelques signaux académiques.

Dans la seconde partie, nous décrirons la méthode d'extraction des événements cohérents et l'algorithme itératif que nous avons développés. Nous les testerons sur un signal académique bruité pour différents rapports signal sur bruit.

Dans la troisième partie, nous appliquerons les méthodes d'analyse en ondelettes et d'extraction des événements cohérents aux fluctuations de densité des ions mesurées par des sondes de Langmuir placées en différents endroits sur le bord du plasma des différentes machines déjà citées.

ANALYSE EN ONDELETTES

Principe

La transformée en ondelettes est une méthode d'analyse et de représentation des signaux qui est complémentaire à celle de Fourier. Elle est caractérisée par l'utilisation de fonctions bien localisées, à la fois dans l'espace physique et dans l'espace spectral, engendrées les unes à partir des autres par translation et dilatation. La transformée de Fourier quant à elle utilise des fonctions non localisées dans l'espace physique, mais bien localisées dans l'espace spectral, engendrées par modulation. La localisation spatiale des fonctions de base et le groupe d'invariance de la transformée constituent les principales différences entre ces deux méthodes.

Les fonctions trigonométriques utilisées par la transformée de Fourier oscillent dans tout l'espace et donc l'information du signal transformé est délocalisée entre tous les coefficients de Fourier. Par contre, les coefficients d'ondelettes préservent les propriétés locales du signal. Ainsi, quand une erreur (de transmission par exemple) affecte un coefficient d'ondelette, son effet sur le signal reconstruit reste local et n'altère pas tout le signal, contrairement à la transformée de Fourier. Cette propriété permet également d'étudier le comportement d'une région particulière du signal directement à partir des coefficients d'ondelettes correspondants. Cette propriété est essentielle pour étudier les signaux non stationnaires ou intermittents, comme ceux rencontrés en turbulence.

Dans l'étude de la turbulence, il n'est légitime d'utiliser la transformée de Fourier que si l'on suppose le phénomène stationnaire (en temps ou homogène en espace) et constitué d'une superposition d'ondes, parce qu'il est alors possible de définir sans contradiction les nombres d'onde associés. Par contre, si on conçoit la turbulence comme un ensemble d'objets élémentaires localisés dans l'espace et en interactions mutuelles (par exemple des tourbillons), il faut utiliser les ondelettes parce que la représentation de Fourier ne préserve pas l'information sur la structure locale. Ces deux méthodes permettent de traduire en langage mathématique deux interprétations différentes du même phénomène physique (cf. *M. Farge, Wavelet transforms and their applications to turbulence, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 24, 395-457, 1992*).

Définition

1. *Admissibilité* : pour qu'une fonction $\psi(x)$ soit une ondelette

$$C_\psi = (2 \cdot \pi)^n \cdot \int_{R^n} |\hat{\psi}(k)|^2 \cdot \frac{d^n k}{|k|^n} < \infty \quad \text{où } \hat{\psi}(k) = (2 \cdot \pi)^{-n} \cdot \int_{R^n} \psi(x) e^{-i \cdot x} d^n x$$

Si la fonction $\psi(x)$ est intégrable cette condition implique que sa moyenne doit être zéro pour garantir l'inversion de la transformée,

2. *Similarité* : toutes les ondelettes qui appartiennent à la même famille doivent être similaires, c'est à dire se déduire les unes des autres par combinaison linéaire de translations et de dilatations,
3. *Inversibilité*: il doit y avoir une formule permettant de reconstruire le signal à partir de ses coefficients d'ondelettes,
4. *Régularité* : une ondelette doit être localisée dans l'espace mais aussi être suffisamment régulière, c'est-à-dire bien localisée en fréquence,
5. *Effacement des comportements réguliers*: pour certaines applications les ondelettes doivent également avoir un certain nombre de moments nuls, afin d'éliminer la partie polynomiale du signal et être ainsi plus sensible aux fluctuations les moins régulières.

Ondelettes continues

Pour créer une transformée en ondelettes il faut d'abord choisir une fonction mère ψ (soit réelle, soit complexe) qui doit respecter les caractéristiques précédentes ; à partir de cette fonction on obtient la famille d'ondelettes en appliquant des translations, des dilatations et des rotations, telles que :

$$\psi_{lx'\theta}(x) = l^{-\frac{n}{2}} \cdot \psi \left[\Omega^{-1}(\theta) \cdot \frac{x - x'}{l} \right]$$

où l est le paramètre de dilatation, x' est le paramètre de translation, Ω la matrice de rotation et n la dimension de l'espace. Le facteur de normalisation $l^{-n/2}$ garantit que toutes les ondelettes ont la même énergie (norme L^2). Dans certains cas, en particulier pour l'étude des comportement singuliers, on choisit plutôt un facteur l^{-n} pour lequel les ondelettes sont normalisées en norme L^1 .

Le produit scalaire L^2 entre le signal $f(x)$ et les ondelettes analysantes $\psi_{lx\theta}(x)$ donne les coefficients d'ondelettes :

$$\tilde{f}(l, x', \theta) = \langle \psi_{lx'\theta} | f \rangle_{L^2} = \int_{R^n} f(x) \psi_{lx'\theta}^*(x) dx \quad (1)$$

avec ψ^* le complexe conjugué de ψ .

On peut reconstruire le signal à partir de ses coefficients d'ondelettes avec la formule

$$f(x) = C_\psi^{-1} \cdot \int_{0^+}^{+\infty} \int_{R^n} \tilde{f}(l, x', \theta) \cdot \psi_{lx'\theta}(x) \frac{dl \cdot d^n x'}{l^{n+1}} \cdot d\mu(\theta)$$

avec $d\mu(\theta)$ la mesure d'intégration associée aux $n(n-1)/2$ angles d'Euler correspondant à la rotation en dimension n .

Dans la suite de ce rapport on ne considérera que des ondelettes isotropes pour lesquelles il n'y a plus d'intégration sur les angles.

Propriétés

L'opération de transformée en ondelettes est linéaire, elle commute donc avec l'opérateur de dérivation. De plus, elle conserve l'énergie (propriété équivalente au théorème de Parseval pour la transformée de Fourier).

La transformée en ondelettes continue est covariante pour une translation d'une distance x et une dilatation d'un facteur l . Elle possède un noyau reproduisant, qui correspond aux corrélations présentes dans la transformée entre deux points voisins (l_1, x'_1) et (l_2, x'_2) dans l'espace d'ondelettes. Celui-ci se définit par

$$K_\psi(l_1, l_2, x'_1, x'_2) = C_\psi^{-1} \int_{0^+}^{+\infty} \psi_{l_1 x'_1} \psi_{l_2 x'_2}^* dx \quad (2).$$

Pour qu'une fonction $\tilde{f} \in L^2$ soit la transformée en ondelettes d'une fonction f , elle doit satisfaire la propriété

$$\tilde{f}(l_1, x'_1) = \int_{0^+}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\psi(l_1, l_2, x'_1, x'_2) f(l_2, x'_2) \frac{dl_2 dx'_2}{l_2^2}.$$

Cette formule nous permet d'introduire une différence importante entre la transformée en ondelettes continue et celle discrète. La transformée continue présente une redondance d'information qui donne lieu à une corrélation entre les

coefficients d'ondelettes voisins, en espace et en échelle, qui est caractérisée par le noyau reproduisant K_ψ . On peut éviter cette redondance en utilisant une base discrète orthogonale pour laquelle chaque ondelette est décorrélée des autres, à la fois en espace et en échelle, ce qui minimise le nombre de coefficients d'ondelettes, qui est alors égal au nombre d'échantillons du signal.

Le choix entre la transformée en ondelettes continues et celle en ondelettes orthogonales doit être dicté par l'application. Pour l'analyse, la transformée continue offre plus d'avantages, tandis que pour la modélisation ou la compression, la transformée orthogonale est de loin préférable car le nombre de coefficients reste minimal et correspond à l'échantillonnage de départ.

Algorithme

Il faut, à partir de l'ondelette 'mère' choisie, engendrer la famille d'ondelettes et ensuite calculer les coefficients. Cela peut être fait, soit dans l'espace physique à l'aide de l'équation (1), soit dans l'espace spectral, ce qui permet alors d'utiliser la FFT (Fast Fourier Transform) pour calculer le produit de convolution

$$\tilde{f}(l, x') = \int_{R^n} \hat{f}(k) \psi_{lx'}^*(k) \cdot d^n k \quad (3)$$

$$\text{où } \psi_{lx'}(k) = l^{n/2} \hat{\psi}(lk) \cdot e^{-ikx'} \quad (4)$$

Si N est le nombre de points d'échantillonnage et J le nombre d'échelle choisies, le temps de calcul est $\sim J \cdot N^2$ en utilisant la formule (3). Il se réduit à $\sim J \cdot N \cdot \log_2 N$ en utilisant la formule (4) grâce à la rapidité de la FFT.

Ondelettes discrètes

Il est possible d'obtenir un ensemble discret d'ondelettes quasi-orthogonales en échantillonnant les axes (l, x) avec une discrétisation logarithmique pour l'axe l et linéaire pour l'axe x' , la position étant indiquée par le paramètre i , avec un pas variable suivant l'échelle. La famille d'ondelettes discrètes ψ_{ji} a la forme

$$\psi_{ji}(x) = (\Delta \log l)^{j/2} \psi \left[(\Delta \log l)^j x - i \Delta x \right]$$

et on obtient les coefficients $\tilde{f}_{ji} = \langle \psi_{ji} | f \rangle$. La quasi-orthogonalité implique la présence d'un résidu qu'il faut ajouter dans la formule de reconstruction et qui est nul seulement si l'ensemble des ondelettes forme une base orthogonale.

Les coefficients discrets ont perdu la redondance d'information qui peut être utile pour l'analyse du signal ; si on veut la récupérer il faut utiliser une formule d'interpolation basée sur le noyau reproduisant (2) qui permet d'obtenir l'ensemble des ondelettes continues associées.

Seules certaines ondelettes particulières permettent d'engendrer une famille d'ondelettes discrètes orthogonales définies sur une grille dyadique, pour laquelle l'échantillonnage en échelle est $\Delta \log l = 2$ ce qui correspond aux octaves indicées par le paramètre j

$$\psi_{ji}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - i)$$

Ces ondelettes ne sont similaires que pour des translations et des dilatations discrètes correspondant à la grille dyadique, mais elles garantissent un résidu nul et un nombre de coefficients d'ondelettes égal à l'échantillonnage N du signal.

Ondelettes orthogonales

Avec l'introduction d'une nouvelle fonction dite 'père' ou 'fonction d'échelle', et de la famille de fonctions qui en dérive, on peut obtenir une approximation du signal ; les détails sont ensuite encodés par les ondelettes. Cette méthode permet de décomposer en ondelettes n'importe quelle fonction indépendamment de son comportement à l'infini (par exemple des fonctions qui n'appartiennent pas à l'espace $L^2(\mathbb{R})$, telles les fonctions trigonométriques).

La fonction d'échelle ϕ doit être telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1$$

Il faut que les fonctions qui en dérivent

$$\phi_{ji} = 2^{j/2} \cdot \phi(2^j \cdot x - i)$$

soient orthogonales aux ondelettes

$$\psi_{j'i'}(x) = 2^{j'/2} \psi(2^{j'} x - i')$$

pour $j' > j$ et pour chaque $i' \neq i$.

La décomposition du signal f s'écrit

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{0i} | f \rangle \cdot \phi_{0i}(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \langle \psi_{ji} | f \rangle \cdot \psi_{ji}(x).$$

Le premier terme représente l'approximation à l'échelle la plus grande $l_{max}=2^0$, tandis que le deuxième fournit les détails pour passer d'une échelle donnée à l'échelle plus petite suivante $l=2^{-j}, j \in [0, +\infty[$.

L'élégance de l'analyse en ondelettes orthogonales, appelée 'analyse multi-résolution', est due au fait que la fonction d'échelle ϕ_{ji} engendre un ensemble de sous-espaces emboîtés $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \dots$, alors que les ondelettes associées ψ_{ji} constituent leurs sous-espaces complémentaires orthogonaux $W_0, W_1 \dots W_j, W_{j+1} \dots$, tels que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

L'inclusion $V_j \subset V_{j+1}$ correspond à un raffinement de la grille d'un facteur 2 :

$$f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot x) \in V_{j+1}$$

Cela indique que l'approximation de $f(x)$ à l'échelle $2^{-(j+1)}$ est

$$\bar{f}_{j+1}(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \langle \phi_{j+1,i} | f \rangle \cdot \phi_{j+1,i}$$

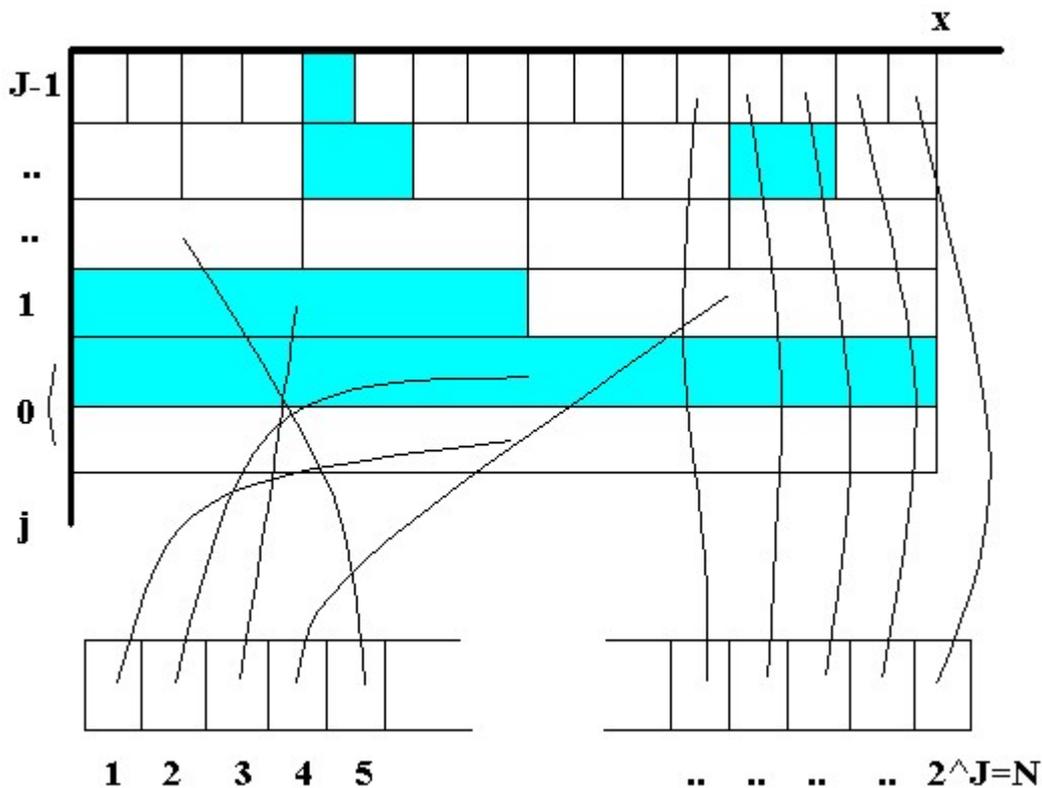
Elle contient toutes les informations pour reconstruire le signal à l'échelle plus grande 2^{-j} . Quand on calcule une approximation de la fonction $f(x)$ à l'échelle 2^{-j} on perd des informations, mais si l'on fait décroître l'échelle jusqu'à $2^{-\infty} = 0$ le signal approché converge vers $f(x)$. Toutes les approximations régulières $\bar{f}_j(x)$ à l'échelle j de $f(x)$ appartiennent à l'espace V_j , tandis que tous les détails supplémentaires $\tilde{f}_j(x)$ nécessaires à l'échelle j pour reconstruire exactement $\bar{f}_{j+1}(x)$ à l'échelle $j+1$ appartiennent à l'espace W_j :

$$\bar{f}_{j+1}(x) = \bar{f}_j(x) + \tilde{f}_j(x)$$

On peut ainsi obtenir de façon récursive la formule de reconstruction :

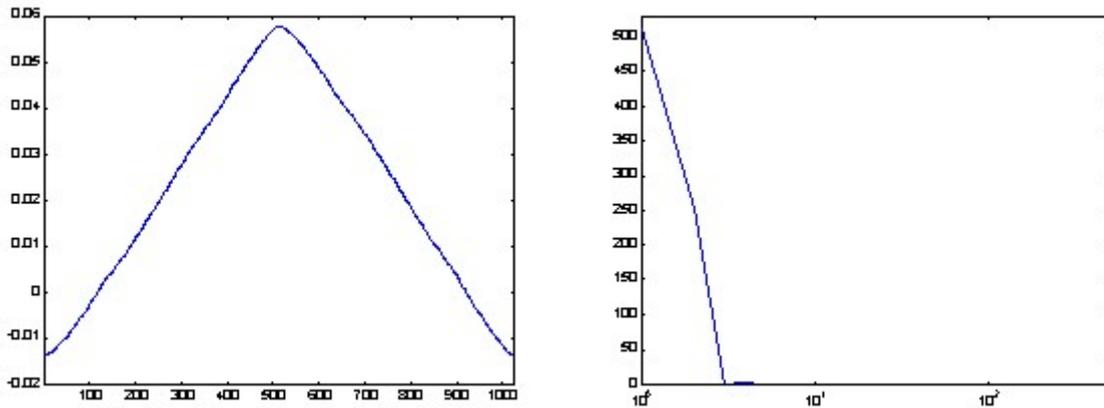
$$f(x) = \bar{f}_0(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{f}_j(x).$$

Pour mieux illustrer cette méthode, supposons un signal échantillonné sur $N=2^J$ points. L'analyse multi-résolution effectuée à l'aide des ondelettes orthogonales permet de décrire le signal comme un ensemble de coefficients qui représentent les poids de chaque ondelette. Le premier coefficient donne la valeur moyenne du signal ; le deuxième décrit le signal à l'échelle la plus grande et donc est celui qui représente le comportement le plus régulier du signal ; au fur et à mesure que l'on augmente j , on passe aux échelles plus fines et les coefficients associés permettent de reconstruire le signal jusqu'aux détails correspondant à l'échantillonnage. Si le signal est caractérisé par une suite d'événements isolés, cette méthode garantit une compression optimale du signal parce qu'elle permet de le réduire le nombre de coefficients de façon sensible.

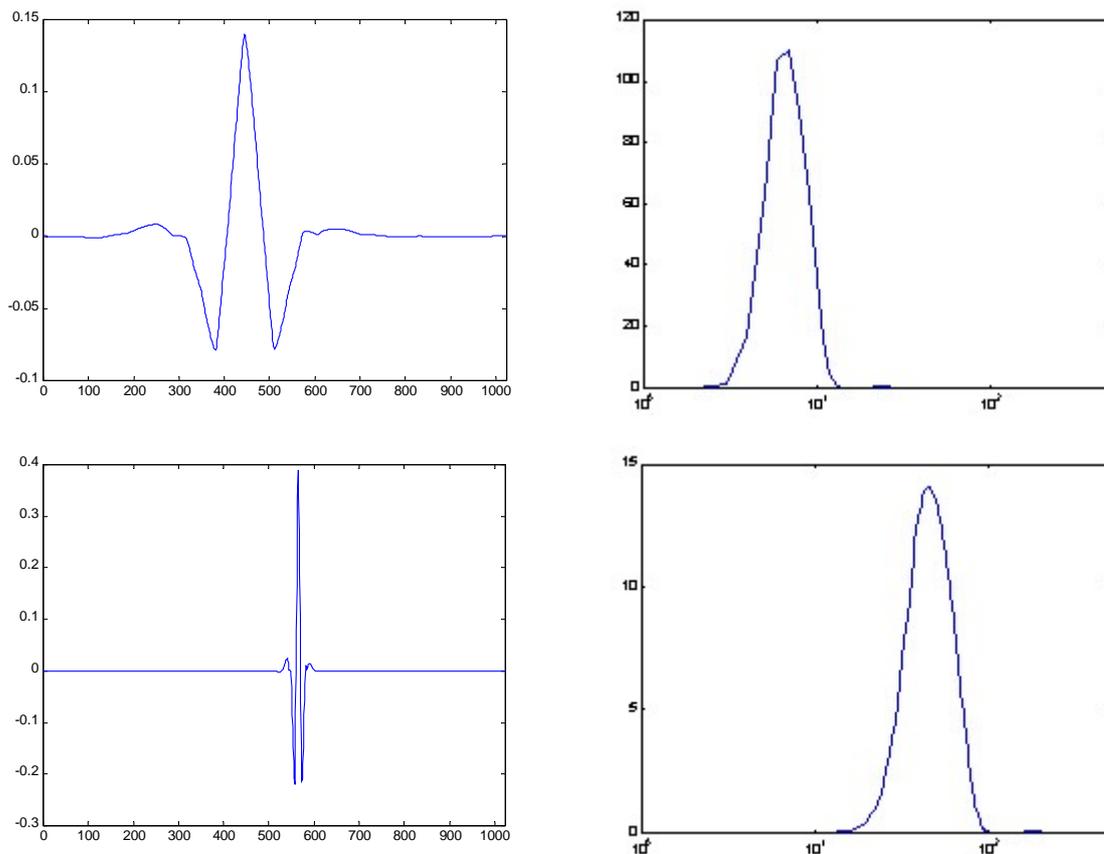


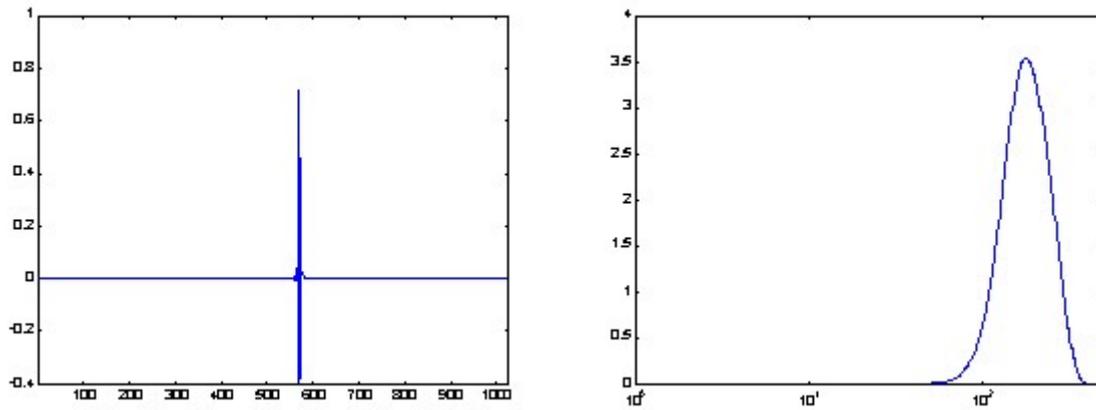
Si N est le nombre de points, $J=\log_2 N$ est le nombre d'octaves disponibles dans le signal.

Nous présentons, à titre d'exemple, plusieurs ondelettes orthogonales appartenant à la famille d'ondelettes périodiques de type Coifman 12 (qui ont quatre moments nuls):



Fonction d'échelle ϕ_{0i} et son spectre





Ondelettes ψ_{ji} à différentes échelles et leurs spectres
(ondelettes de Coifman périodique avec 4 moments nuls)

On peut voir que l'ondelette père est un filtre passe-bas : il ne met en évidence que les fréquences les plus basses du signal, celles qui représentent le comportement plus régulier. Par contre les ondelettes à plus petite échelle sont des filtres passe-bande, qui laissent passer des fréquences de plus en plus élevées, permettant de caractériser les événements les plus singuliers du signal.

Pour avoir une présentation générale et historique du développement de la transformée en ondelettes, se reporter à l'ouvrage de vulgarisation (ayant obtenu le Prix d'Alembert de la Société Mathématique de France) : *Barbara Burke, Ondes et ondelettes, Belin, 1997.*

Pour avoir une présentation plus complète de la transformée en ondelettes continue, se reporter à l'article de revue : *Marie Farge, Wavelet transforms and their applications to turbulence, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 24, 395-457, 1992.*

Pour avoir une présentation plus complète de la transformée en ondelettes orthogonales, se reporter aux ouvrages : *Ingrid Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF regional conferences series in applied mathematics, vol. 61, SIAM, 1992* et *Stéphane Mallat, A wavelet tour of signal processing, Academic Press, 1998.*

ANALYSE DE SIGNAUX ACADEMIQUES

Analyse en ondelettes continue

Pour illustrer l'utilisation de la transformée en ondelettes continue, nous l'appliquons à différents signaux académiques. Nous avons utilisé une ondelette de Morlet à valeurs complexes

$$\psi(x) = e^{ik_{\psi}x} e^{-x^2/2}$$

avec $k_{\psi} = 5$ la fréquence caractéristique de l'ondelette.

Pour l'analyse de signal, il est préférable d'utiliser des ondelettes à valeurs complexes, plutôt que des ondelettes à valeurs réelles (dérivées de Gaussiennes par exemple), dans la mesure où peut ainsi étudier séparément le module des coefficients d'ondelettes, qui donne la densité d'énergie en espace et en échelles, et leur phase, qui détecte les singularités du signal quelque soit leur type (ordre à partir duquel les dérivées divergent). En effet, comme les signaux traités sont à valeurs réelles et les ondelettes sont à valeurs complexes, les coefficients d'ondelettes obtenus sont à valeurs complexes :

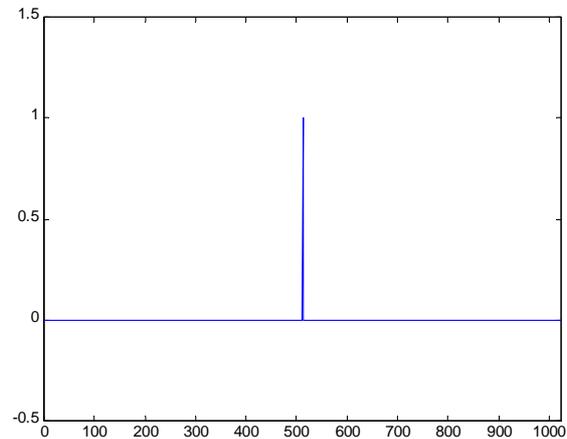
- $\tilde{f} = \Re + i\Im$,
- ce qui donne le module $(\Re^2 + \Im^2)^{1/2}$
- et la phase $\text{arc tg } \frac{\Im}{\Re}$.

- **Dirac**

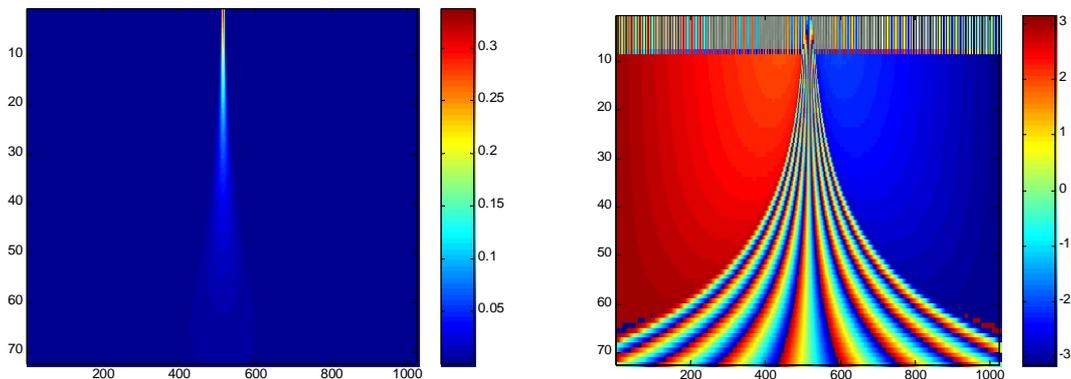
Le signal à analyser est un Dirac centré au milieu d'un intervalle $[0,1]$ échantillonné sur 1024 points. Ceci permet de vérifier l'implémentation numérique de la transformée en ondelettes continue, car la transformée en ondelettes d'un Dirac correspond à l'ensemble des ondelettes centrées au même point. On vérifie ainsi qu'à l'échelle la plus petite, qui dépend de l'ondelette choisie et de l'échantillonnage du signal, l'ondelette reste suffisamment

échantillonnée. On vérifie également qu'à l'échelle la plus grande, l'ondelette centrée au milieu reste bien à l'intérieur de l'intervalle occupé par le signal.

Les coefficients de la transformée en ondelettes sont à valeurs complexes. On les représente dans l'espace des ondelettes, avec les positions x' en abscisse et les échelles l en ordonnée, en traçant séparément leur module et leur phase.



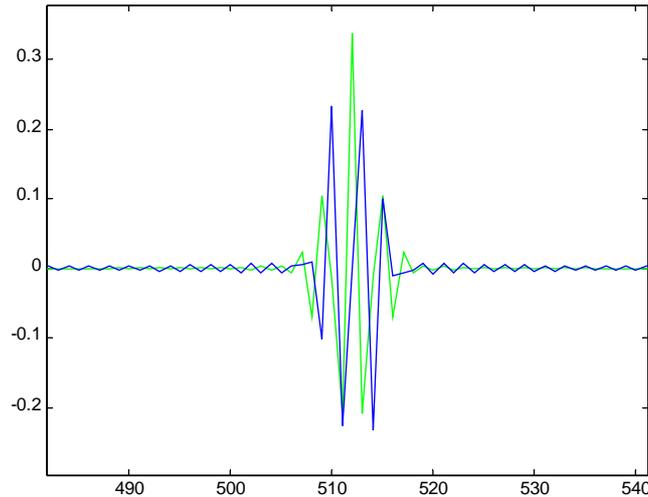
Dirac



Module et phase des coefficients d'ondelettes

Ces deux figures montrent qu'au fur et à mesure que l'on diminue l'échelle la singularité apparaît de plus en plus clairement parce qu'on augmente la précision spatiale de l'ondelette.

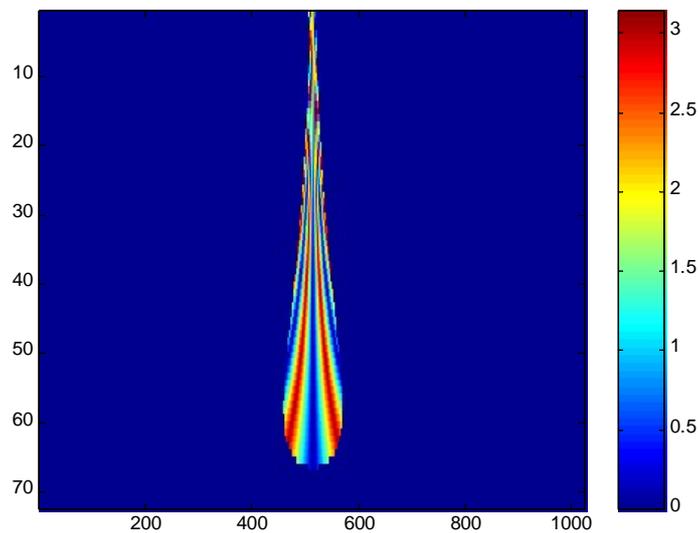
On constate ici que la phase présente de l'aliasage à petite échelle car l'ondelette choisie n'est plus assez échantillonnée à cette échelle. Ceci est vérifié quand on trace les parties réelle et imaginaire de l'ondelette à la plus petite échelle $l = 1$:



Parties réelle (bleu) et imaginaire (vert) de l'ondelette à l'échelle $l=1$

Les parties réelle et imaginaire de l'ondelette à la plus petite échelle ne sont plus en quadrature de phase et il apparaît des oscillations de Gibbs dues au sous-échantillonnage de l'ondelette à cette échelle.

Comme la phase est l'arc tangente du rapport entre les parties imaginaire et réelle, quand celles-ci deviennent petites la phase se met à tourner arbitrairement vite et n'a plus de sens. Nous avons donc choisi de mettre à zéro la phase pour les coefficients dont le module est très petit. La phase du Dirac limitée à sa partie significative devient ainsi :

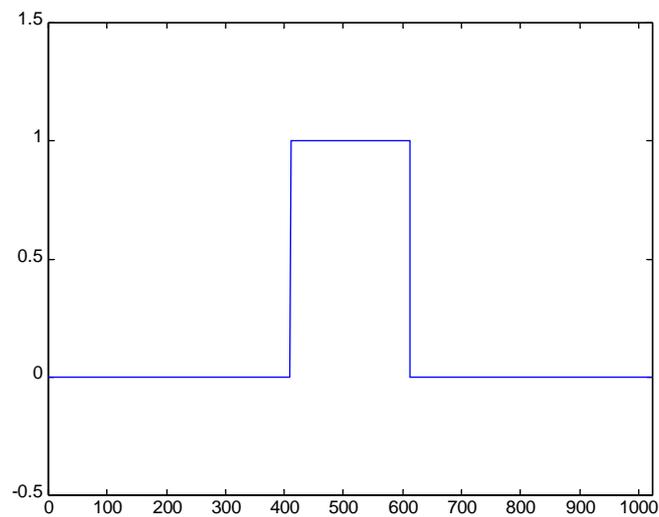


Phase limitée à sa partie significative

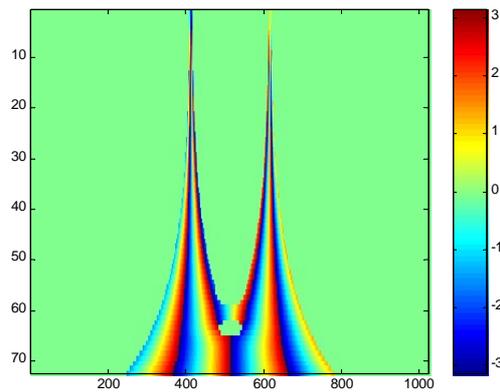
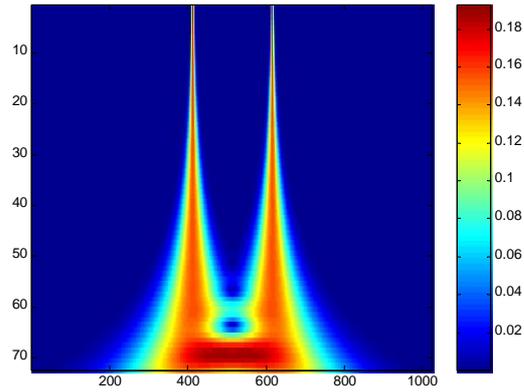
Dans la suite du rapport nous avons toujours utilisé cette représentation.

- *Echelon*

Le signal, échantillonné sur 1024 points, vaut 0 sur l'intervalle [0,1023], sauf dans sa partie [400 , 600] où il vaut 1.



Echelon

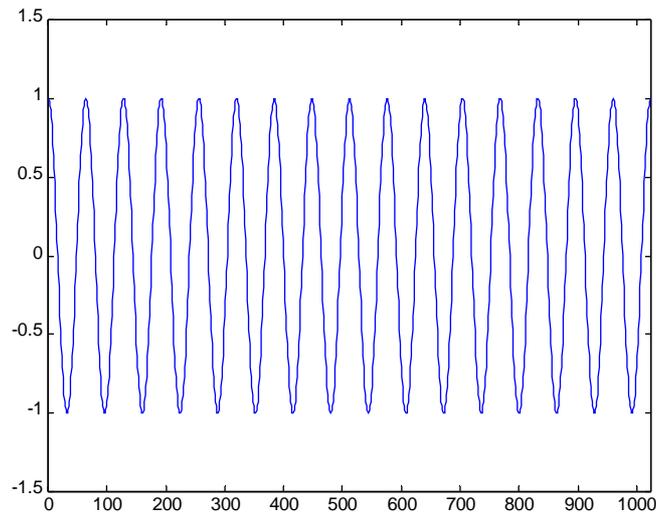


Module et phase des coefficients d'ondelettes

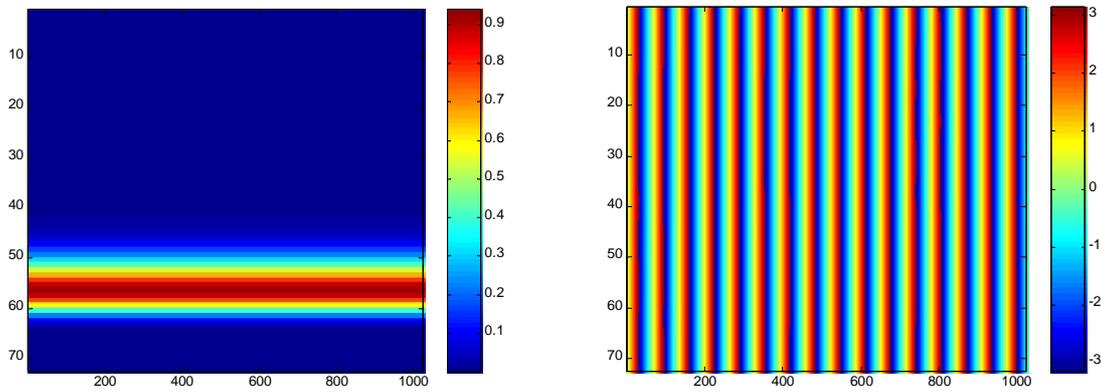
Le module et la phase pointent sur les positions $x'=400$ et 600 où se trouvent les discontinuités. Le module présente également deux extrema à $l=70$ et 60 qui correspondent aux échelles des deux régions où le signal est constant.

- *Cosinus*

Le signal à analyser est un cosinus échantillonné sur 1024 points : $\cos\left(\frac{2\pi x}{64}\right)$, de longueur d'onde $\lambda=64 \Delta x'$, $\Delta x'$ étant le pas d'échantillonnage.

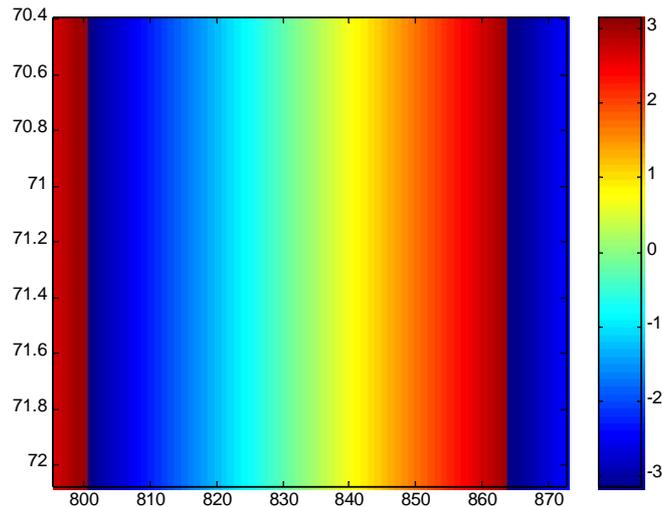


Cosinus



Module et phase des coefficients d'ondelettes

Les figures montrent que le signal est composé d'une seule fréquence qui est présente sur tout l'intervalle avec la même intensité.



Détail de la phase

La phase permet d'établir la période séparant deux lignes de phase constante car pour un signal monochromatique le nombre de zéros de la phase est constant et donne la fréquence du signal. On trouve bien $\lambda = 64 \Delta x'$.

Le module présente un maximum à l'échelle $l = 56 \Delta x'$ qui est reliée à la longueur d'onde λ par la relation :

$$\lambda = k_{\psi} \cdot 2^{\frac{l-1}{n}}$$

où l est l'échelle correspondant au maximum du module, n le nombre d'échelles par octave ($n = 12$ dans notre cas) et k_{ψ} la fréquence propre de l'ondelette utilisée.

On vérifie que

$$64 = k_{\psi} \cdot 2^{\frac{56-1}{12}} \Rightarrow k_{\psi} = 2.67$$

Cette formule permet d'estimer la fréquence du signal à partir du module de ses coefficients d'ondelettes.

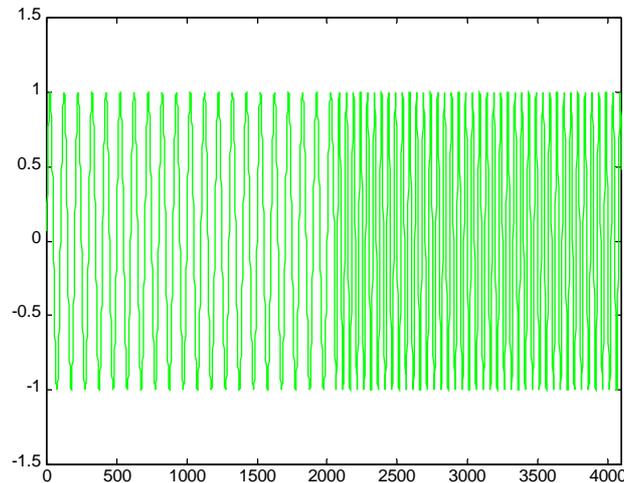
L'étendue des échelles va de la fréquence maximale de coupure $k_{max} = N/2 - 1$ ($\lambda_{min} = 2 \Delta x'$) à la fréquence minimale $k_{min} = 1$ ($\lambda_{max} = N \Delta x'$).

- ***Doublement de fréquence***

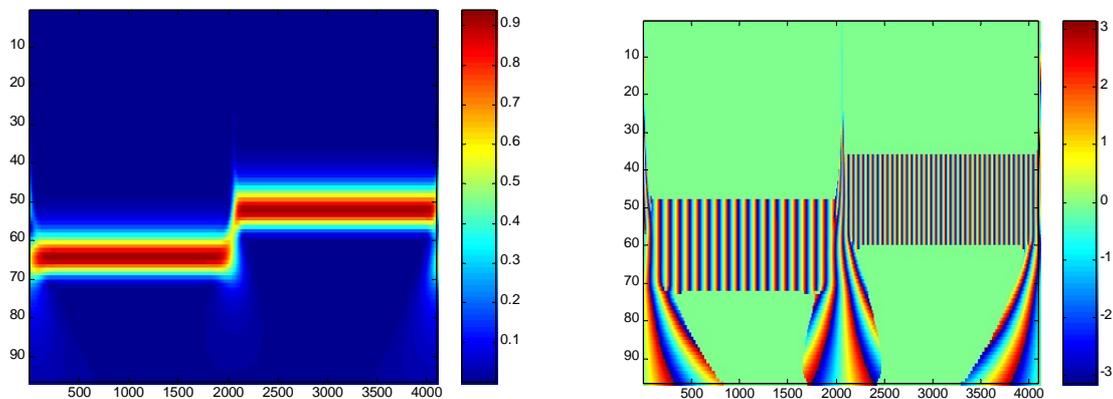
Considérons un signal échantillonné sur 4096 points qui présente un doublement de fréquence

$$f(x) = \sin(2\pi x/100) \chi[1, 2^{11}] + \sin(2\pi x/50) \chi[2^{11}+1, 2^{12}]$$

avec χ la fonction caractéristique qui vaut 1 sur l'intervalle [a,b] et 0 en dehors.



Signal échantillonné sur $N = 2^{12}$ points



Module et phase des coefficients d'ondelettes

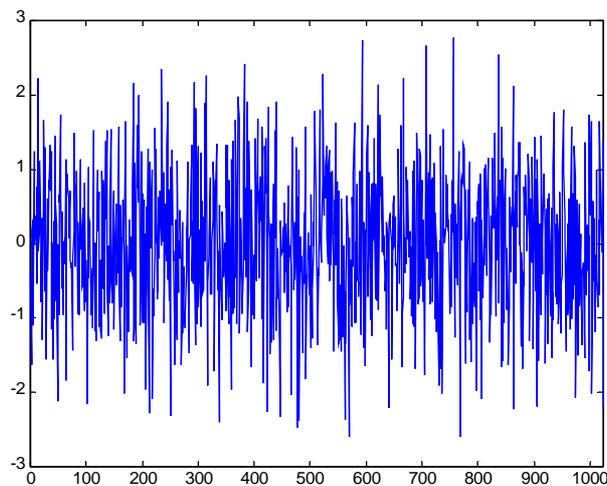
La phase détecte deux singularités au niveau des raccords entre les deux fréquences, à $x'=0$ et 2048 , qui sont dues aux discontinuités des dérivées du signal en ces points.

Le module présente deux maxima aux échelles $l=52$ et 64 , ce qui correspond aux longueurs d'onde $\lambda=50$ et $100 \Delta x'$.

Analyse en ondelettes orthogonales

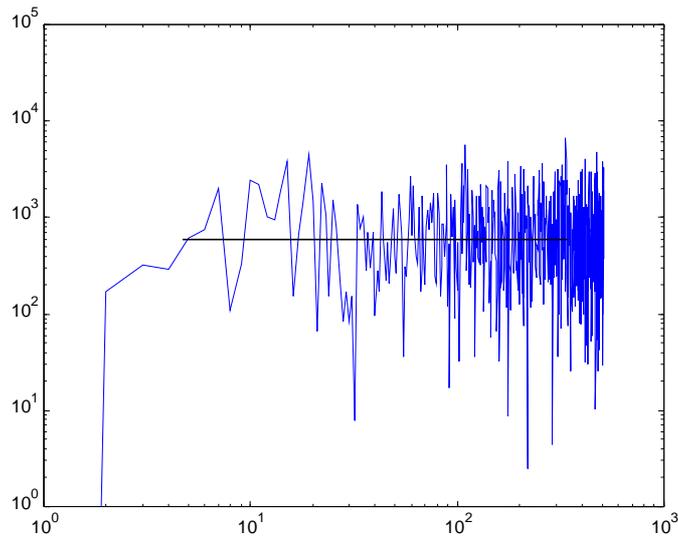
- *Bruit blanc Gaussien*

On analyse en ondelettes orthogonales une réalisation d'un bruit blanc Gaussien, échantillonné sur $N=1024$ points, de moyenne 0 et variance $\sigma^2 = 1$. Nous utilisons l'ondelette périodique Coifman 12 qui a quatre moments nuls.



Signal

On calcule d'abord le spectre du signal, qui est donné par le carré de ses coefficients de Fourier et correspond à la densité d'énergie de chaque mode de Fourier. On le trace en échelle log-log avec en abscisse la fréquence allant de $k=1$ à 512 , qui est la fréquence de Nyquist $k_{max}=N/2$ correspondant à l'échantillonnage.

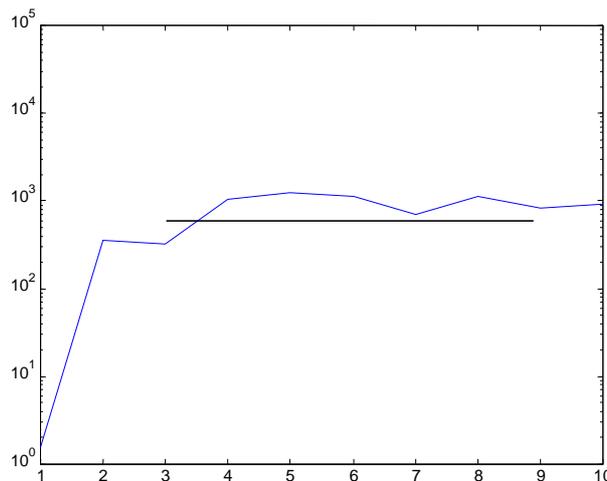


Spectre du signal

On vérifie que le spectre est plat, car un bruit blanc est par définition décorrélé et correspond à l'équipartition de l'énergie entre tous les modes de Fourier.

On calcule ensuite le scalogramme du signal qui est donné par le carré de ses coefficients en ondelettes orthogonales en fonction de l'échelle $l=2^j$ (j index de l'octave qui varie de 0 à $J=10$ correspondant à la plus grande octave $J=\log_2 N$)

$$E_j = \frac{1}{2^j} \sum_{i=0}^{2^j-1} |\tilde{f}_{j,i}|^2$$



Scalogramme en fonction de l'octave j

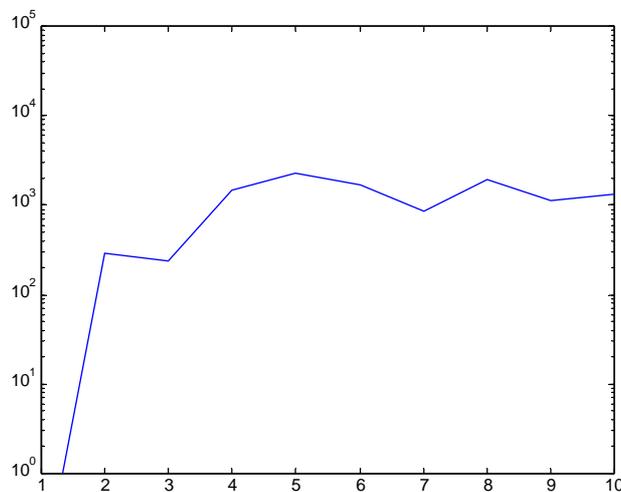
Le scalogramme correspond au moment d'ordre 2 des coefficients d'ondelettes et présente le même comportement en fonction de l'échelle que le spectre de Fourier, sans qu'il y ait d'oscillations à petite échelle car le scalogramme est un meilleur estimateur statistique que le spectre.

On constate que l'énergie est également équirépartie entre toutes les ondelettes car, étant donné qu'un bruit blanc est par définition décorrélé, il ne se comprime dans aucune base.

On peut ensuite généraliser aux moments d'ordre p

$$M_{p,j} = \frac{1}{2^j} \sum_{i=0}^{2^j-1} |\tilde{f}_{j,i}|^p$$

et considérer par exemple le moment d'ordre 3 en fonction de l'échelle $l=2^j$



Moment d'ordre $p = 3$ en fonction de l'octave j

On peut également étudier le rapport de différents moments en fonction de l'échelle

$$Q_{p,q,j}(f) = \frac{M_{p,j}(f)}{(M_{q,j}(f))^{p/q}}$$

En particulier on définit le taux d'aplatissement (flatness) en fonction de l'échelle, $Q_{4,2,j}$, ainsi que le taux d'asymétrie (skewness) en fonction de l'échelle, $Q_{3,2,j}$. Pour un bruit blanc Gaussien le taux d'aplatissement est égal à 3 et le taux d'asymétrie est égal à 0, ceci à toutes les échelles.

EXTRACTION DES EVENEMENTS COHERENTS

Principe

La décomposition en ondelettes peut être utilisée pour éliminer le bruit n du signal S . Pour cela il est préférable d'utiliser les ondelettes orthogonales qui sont par construction décorréliées les unes des autres. La transformée en ondelettes continues présente par contre une redondance qui correspond à la corrélation entre les différentes ondelettes, de courte portée en espace et en échelle, donnée par le noyau reproduisant (2) de l'ondelette choisie.

David Donoho et Ian Johnstone, du département de statistiques de l'Université de Stanford, ont proposé une méthode pour éliminer un bruit supposé blanc et Gaussien de variance σ_n^2 . Après avoir calculé les coefficients de la transformée en ondelettes orthogonales du signal bruité S , on reconstruit le signal en ne prenant que les coefficients dont le module dépasse la valeur seuil :

$$T = \sigma_n \sqrt{2 \ln N}$$

David Donoho et Ian Johnstone ont démontré que cette méthode est le meilleur estimateur, au sens minmax, du signal débruité, c'est à dire que la norme de la différence entre ce signal reconstruit et le signal non bruité est minimale (cf. *D. Donoho and I. Johnstone, Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage, Biometrika, 81 : 425-457, 1992*).

Algorithme itératif

Nous avons développé une variante de cette méthode pour extraire les structures cohérentes qui se forment dans les écoulements turbulents sous l'effet de la dynamique non linéaire (cf. *M. Farge, K. Schneider and N. Kevlahan, Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis, Phys. Fluids, 11(8), 2187-2201, 1999* et *M. Farge, G. Pellegrino and K. Schneider, Coherent vortex extraction in 3D turbulent flows using orthogonal wavelets, Phys. Rev. Lett., 87(5), 54011-45014, 2001*). Nous l'appliquerons ici sur des signaux temporels et nous parlerons dans ce cas d'événements cohérents plutôt que de structures

cohérentes. Cette procédure sépare chaque réalisation d'un écoulement turbulent en une partie cohérente et une partie incohérente supposée être dominée par le bruit. Comme on ne connaît pas a priori la variance du bruit σ_n^2 , on surestime celle-ci en prenant la variance de tout le signal σ_s^2 et le seuil devient

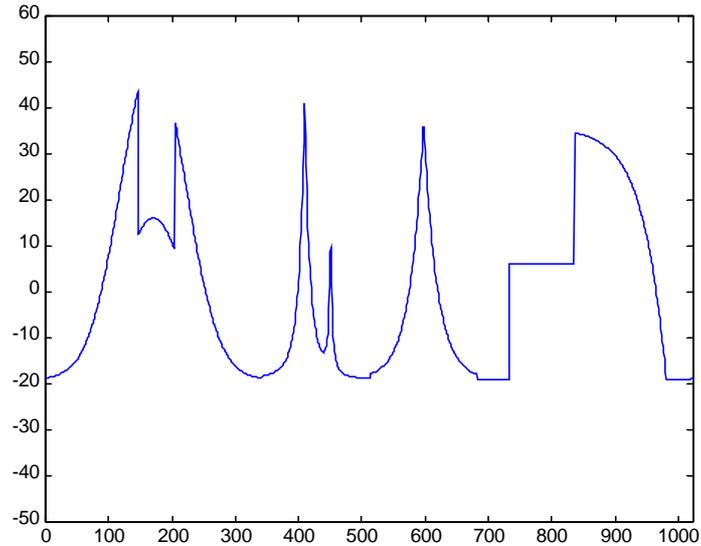
$$T_0 = \sigma_s \sqrt{2 \ln N}$$

On calcule ensuite la variance des coefficients d'ondelettes dont le module est inférieur à la valeur seuil T_0 , ce qui permet alors une première estimation de σ_n^2 . On itère ensuite le processus jusqu'à ce que la valeur du seuil T_i reste constante. On peut démontrer que cet algorithme itératif converge de façon monotone, avec un taux de convergence d'autant plus grand que le rapport signal sur bruit est faible. On reconstruit la contribution incohérente S_{inc} , qui correspond au bruit, à partir des coefficients d'ondelettes dont le module est inférieur au dernier seuil trouvé. La contribution cohérente, qui correspond au signal débruité, est calculée par la différence $S_{coh} = S - S_{inc}$ étant donné que la décomposition est orthogonale. On a par conséquent également décomposée l'énergie en

$$\langle S^2 \rangle = \langle S_{coh}^2 \rangle + \langle S_{inc}^2 \rangle .$$

Débruitage de signaux académiques

Nous avons appliqué cette méthode d'extraction des événements cohérents à un signal académique, échantillonné sur $N=2^{10}=1024$ points, présentant sept singularités différentes (ayant chacune la même amplitude mais étant caractérisées par des exposants de Hölder différents), que nous avons bruitées en ajoutant différents bruits blanc Gaussiens correspondant à des rapports signal sur bruit allant de 5 à 25 dB. Comme le signal de départ présente des singularités, les algorithmes classiques de débruitage, filtre de Wiener par exemple, détruisent celles-ci en filtrant les hautes fréquences. L'intérêt de l'utilisation du filtrage en ondelettes consiste à essayer d'extraire le mieux possible les singularités présentes dans le signal non bruité.

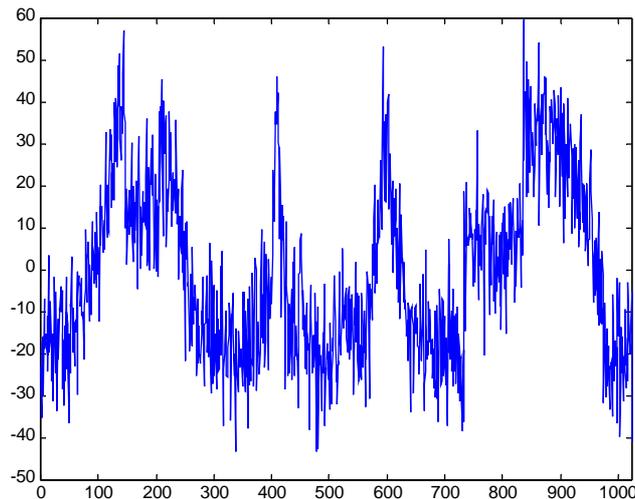


Signal non bruité

- *Pour un rapport signal sur bruit de 5 dB*

La variance du signal est $\sigma_s^2 = 321$. Nous lui ajoutons un bruit blanc Gaussien de variance $\sigma_n^2 = 100$, ce qui correspond à un rapport signal sur bruit de

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} = 5 \text{ dB}.$$



Signal bruité (SNR=5dB)

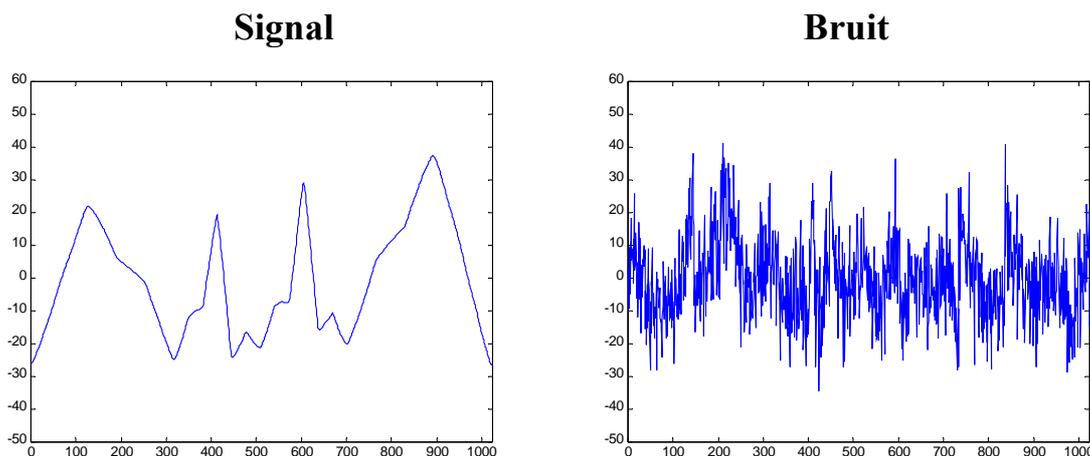
Nous appliquons l'algorithme d'extraction des événements cohérents pour obtenir la décomposition du signal en contributions cohérente et incohérente, $S_{tot} = S_{coh} + S_{inc}$, ce qui permet de calculer le taux de compression de la

variance $\frac{\sigma_{coh}^2}{\sigma_{tot}^2} \cdot 100$ et le rapport signal sur bruit estimé :

$$SNR_e = 10 \log_{10} \frac{\sigma_{tot}^2}{\sigma_{inc}^2}.$$

Algorithme non itéré

L'algorithme appliqué une seule fois, nous donne un seuil $T=75.17$ et on obtient les contributions cohérente et incohérente :



Le nombre de coefficients retenus :

$$N_{coh} = 10 = 0.98 \% N$$

$$N_{inc} = 1014 = 99.02 \% N$$

Les variances sont :

$$\sigma_{tot}^2 = 407.55 \quad \sigma_{coh}^2 = 255.42 \quad \sigma_{inc}^2 = 152.13$$

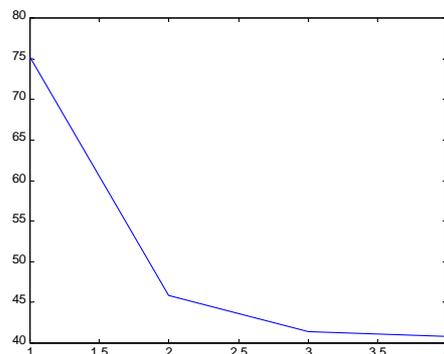
Le taux de compression de la variance est : 62.67 %

Le rapport signal sur bruit estimé est : 4.3 dB

On voit que, si on n'itère pas l'algorithme, le taux de compression obtenu est très important (0.98% N modes décrivent le signal) mais on surestime alors le bruit, car on est parti du principe que l'on ne connaissait pas sa variance a priori et que l'on l'estime en prenant la variance de tout le signal.

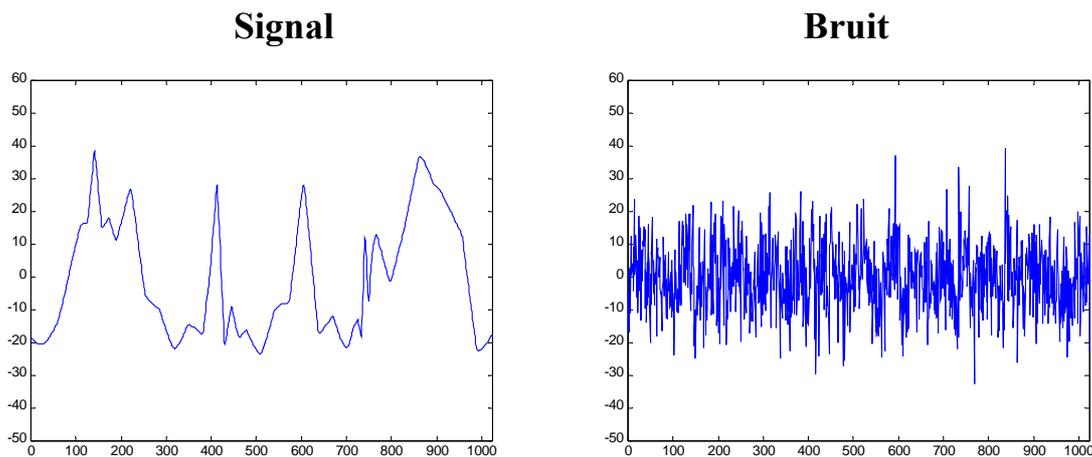
Algorithme itéré

Si on fait maintenant converger l'algorithme, la valeur optimale du seuil, $T=4.08$, est atteinte après 4 itérations :



Valeurs du seuil en fonction des itérations

On obtient les contributions cohérente et incohérente :



Le nombre de coefficients retenus :

$$\begin{aligned} N_{\text{coh}} &= 20 = 1.95 \% N \\ N_{\text{inc}} &= 1004 = 98.05 \% N \end{aligned}$$

Les variances sont :

$$\sigma_{\text{tot}}^2 = 407.55 \quad \sigma_{\text{coh}}^2 = 287.46 \quad \sigma_{\text{inc}}^2 = 120.09$$

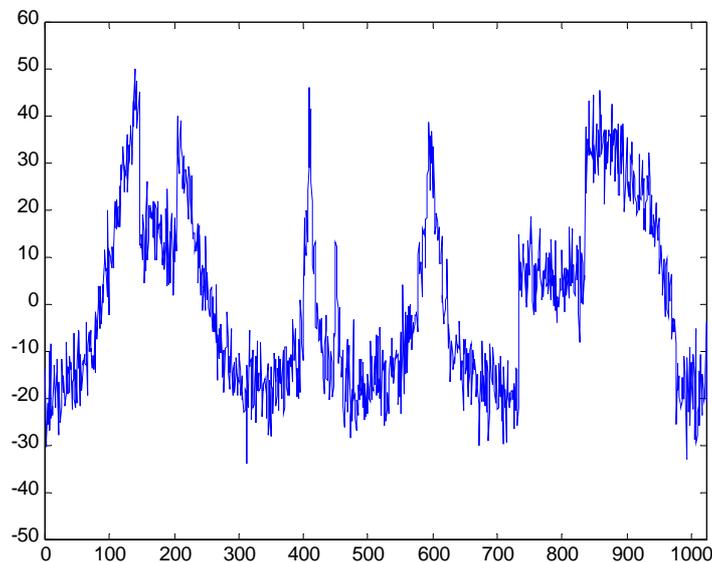
Le taux de compression de la variance est : 70.53 %

Le rapport signal sur bruit estimé est : 5.3 dB

L'algorithme converge rapidement (après 4 itérations), mais que le signal débruité est différent du signal de départ et le taux de compression de la variance n'est pas très important (70%). Cependant l'estimation du rapport signal sur bruit est satisfaisant (5.3 au lieu de 5 dB).

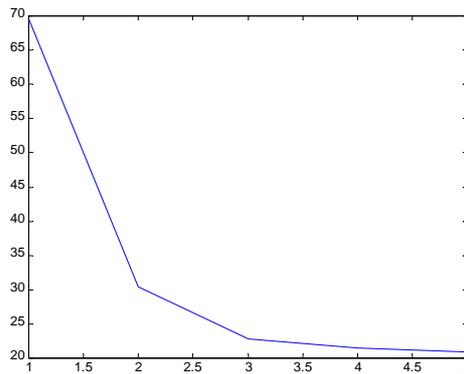
- ***Pour un rapport signal sur bruit de 11 dB***

La variance du signal est $\sigma_s^2 = 321$. Nous lui ajoutons un bruit blanc Gaussien de variance $\sigma_n^2 = 25$, ce qui correspond à un rapport signal sur bruit de 11 dB.



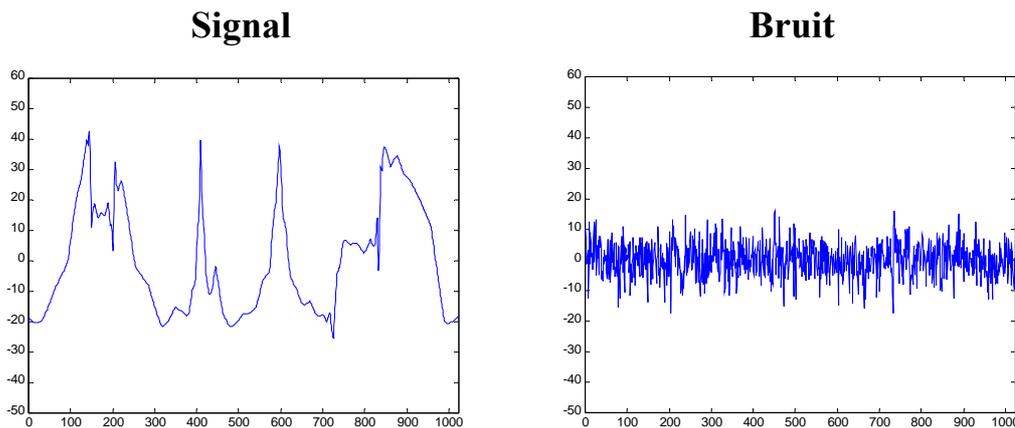
Signal bruité (SNR=11dB)

La valeur optimale du seuil, $T=20.9$, est atteinte après 5 itérations :



Valeurs du seuil en fonction des itérations

On obtient dans les contributions cohérente et incohérente :



Le nombre de coefficients retenus :

$$N_{\text{coh}} = 37 = 3.6 \% N$$

$$N_{\text{inc}} = 987 = 96.4 \% N$$

Les variances sont :

$$\sigma_{\text{tot}}^2 = 344.53 \quad \sigma_{\text{coh}}^2 = 315.42 \quad \sigma_{\text{inc}}^2 = 29.11$$

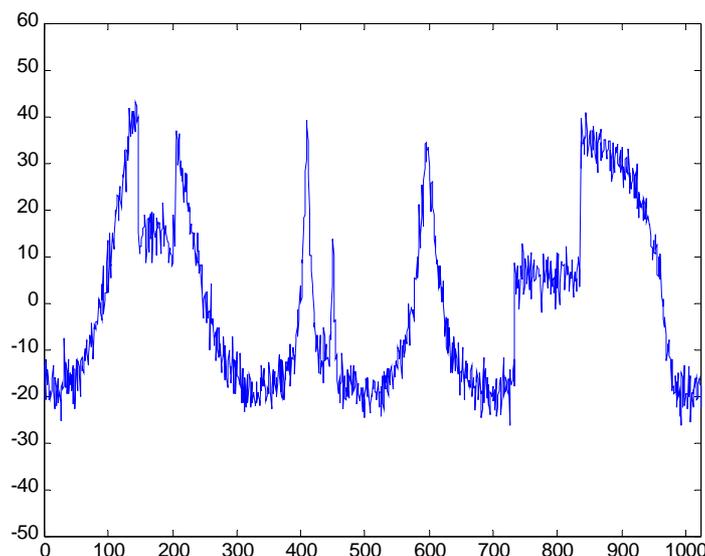
Le taux de compression de la variance est : 91.55 %

Le rapport signal sur bruit estimé est : 10.7 dB

L'algorithme converge rapidement (5 itérations), mais que le signal débruité reste sensiblement différent du signal de départ, bien que les sept singularités soient bien extraites. Le taux de compression de la variance est bon (91%) et l'estimation du rapport signal sur bruit est satisfaisante (10.7 au lieu de 11 dB).

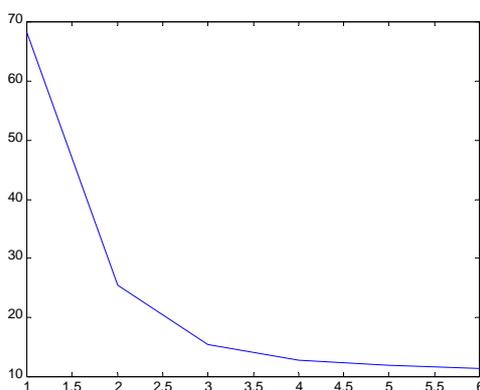
- **Pour un rapport signal sur bruit de 15 dB**

Nous considérons maintenant un bruit ayant une variance beaucoup plus faible, $\sigma_n^2=3$, ce qui correspond à un rapport signal sur bruit de 15 dB.



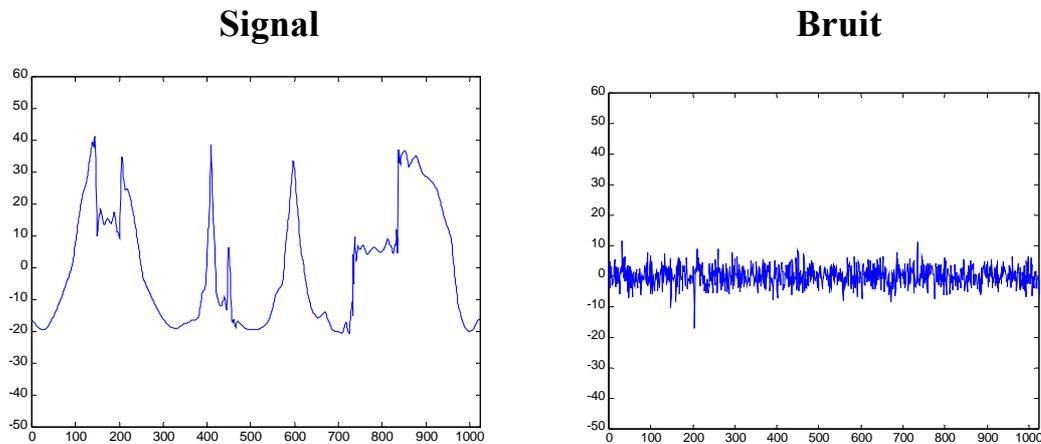
Signal bruité (SNR=15 dB)

La valeur optimale du seuil, $T=11.5$, est atteinte après 6 itérations :



Valeurs du seuil en fonction des itérations

On obtient dans les contributions cohérente et incohérente :



Le nombre de coefficients retenus :

$$N_{\text{coh}} = 58 = 5.6 \% N$$

$$N_{\text{inc}} = 966 = 94.4 \% N$$

Les variances sont :

$$\sigma_{\text{tot}}^2 = 335.4 \quad \sigma_{\text{coh}}^2 = 325.96 \quad \sigma_{\text{inc}}^2 = 9.49$$

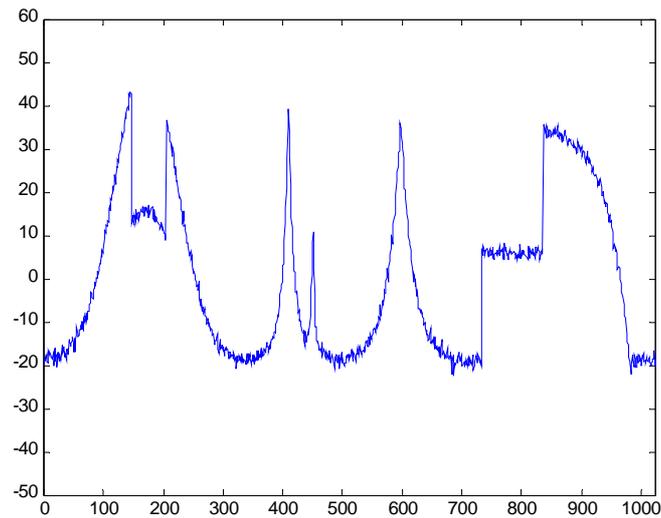
Le taux de compression de la variance est : 97.2 %

Le rapport signal sur bruit estimé est : 15.5 dB

L'algorithme converge avec une itération de plus (6 itérations), mais maintenant le signal débruité donne une bonne approximation du signal de départ et les 7 singularités sont bien représentées. Le taux de compression de la variance est très bon (97.2%) et l'estimation du rapport signal sur bruit reste toujours satisfaisante (15.5 au lieu de 15 dB).

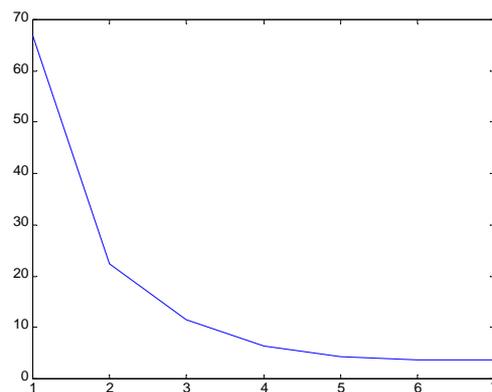
- *Pour un rapport signal sur bruit de 25 dB*

Nous considérons maintenant un bruit ayant une variance beaucoup plus faible, $\sigma_n^2=1$, ce qui correspond à un rapport signal sur bruit de 25 dB.



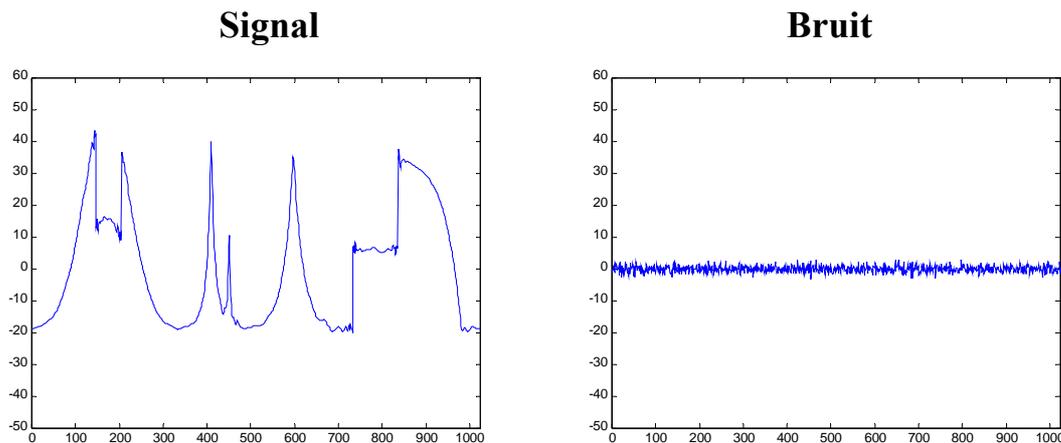
Signal bruité (SNR=25 dB)

La valeur optimale du seuil, $T=3.6$, est atteinte après 7 itérations :



Valeurs du seuil en fonction des itérations

On obtient les contributions cohérente et incohérente :



Le nombre de coefficients retenus :

$$N_{\text{coh}} = 98 = 9.6 \% N$$
$$N_{\text{inc}} = 926 = 90.4 \% N$$

Les variances sont :

$$\sigma_{\text{tot}}^2 = 322.1 \quad \sigma_{\text{coh}}^2 = 321.1 \quad \sigma_{\text{inc}}^2 = 0.95$$

Le taux de compression de la variance est : 99.7 %

Le rapport signal sur bruit estimé est : 25.3 dB

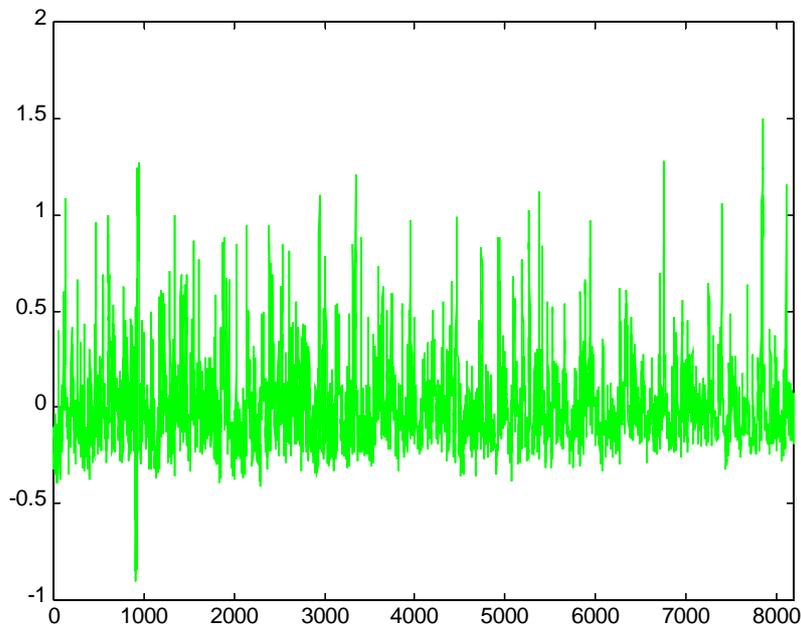
On constate que l'algorithme converge un peu moins rapidement quand le rapport signal sur bruit est meilleur (7 itérations), mais par contre le signal débruité devient très semblable au signal de départ, avec juste un léger dépassement (overshoot) au niveau des singularités les plus fortes. Le taux de compression de la variance est excellent (99.7%) et l'estimation du rapport signal sur bruit est satisfaisante (25.3 au lieu de 15 dB).

En conclusion, l'algorithme d'extraction des événements cohérents (ici différentes singularités de même amplitude mais ayant des exposants de Hölder différents) est fiable quand le rapport signal sur bruit est supérieur à 15 dB. Pour des rapports signal sur bruit plus petits, leur estimation reste bonne et les événements les plus singuliers sont bien détectés, mais la structure précise du signal de départ n'est pas retrouvée.

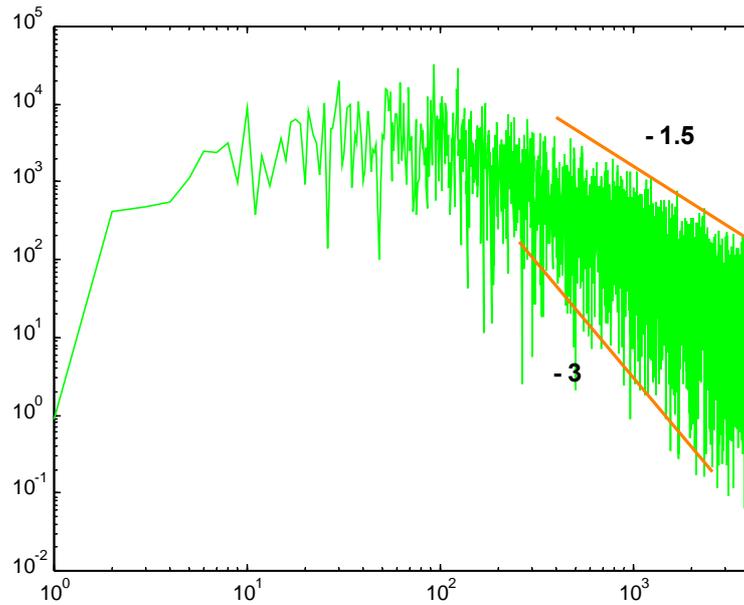
SIGNAUX DE PLASMAS DE BORD

Tokamak Tore-Supra, Cadarache

Nous avons analysé un signal mesuré par une sonde de Langmuir dans le tokamak Tore Supra qui se trouve au CEA-EURATOM de Cadarache. Ce signal représente l'évolution temporelle de la densité des ions en un point de mesure situé au bord du plasma. Ce signal est échantillonné sur $N=2^{13}=8192$ points.



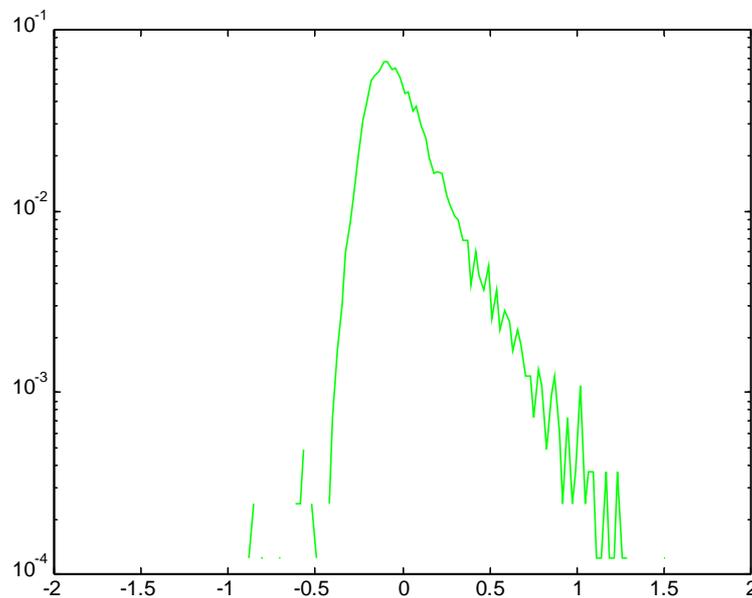
Signal échantillonné sur $N=2^{13}=8192$ points



Spectre du signal total

On observe dans le spectre de Fourier (module des coefficients de Fourier en fonction du nombre d'onde k) du signal deux zones inertielles :

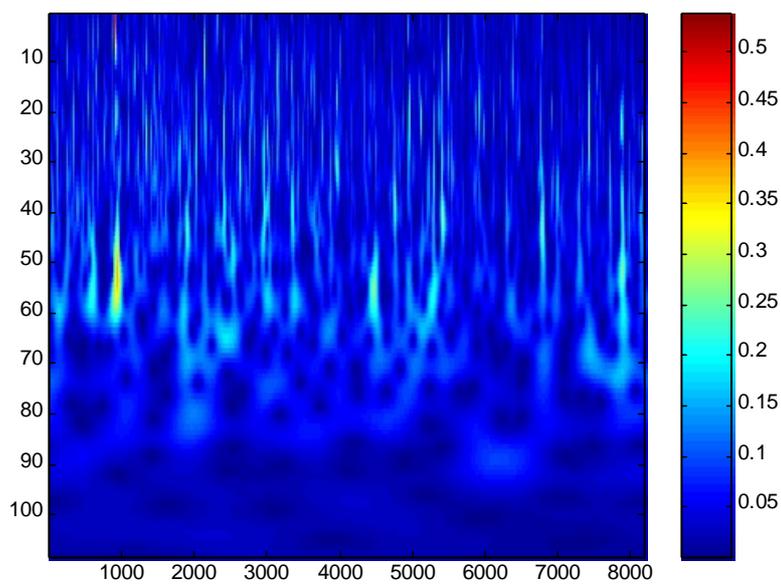
- la première en k^0 , allant de $k=1$ à 100 ,
- la seconde approximativement en k^{-2} , allant de $k=100$ à 4096 .



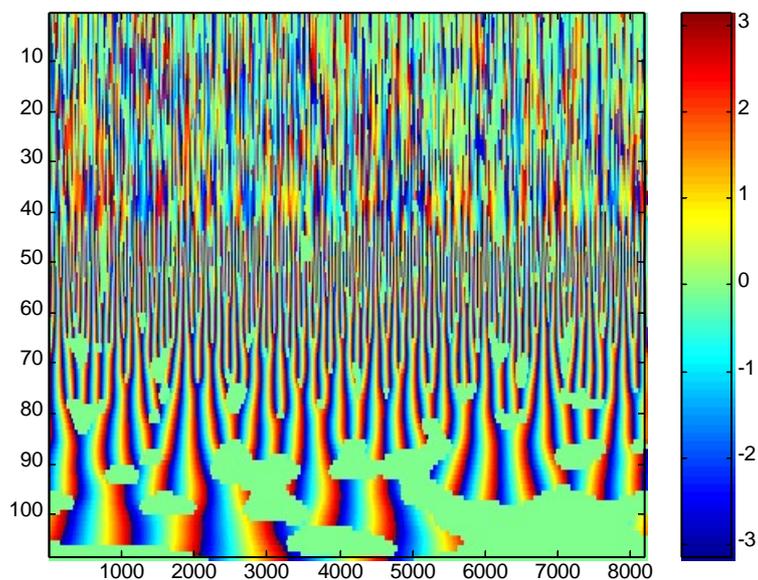
PDF du signal total

L'histogramme des valeurs du signal correspond à la distribution de probabilité marginale et permet d'estimer sa fonction de densité de probabilité (PDF). On voit que celle-ci présente une loi Gaussienne pour les valeurs négatives et une loi exponentielle de la forme $p(x)=e^{-2x}$ pour les valeurs positives.

La transformée en ondelettes continue du signal est représentée dans l'espace des ondelettes, où le temps est en abscisse et l'échelle temporelle est en ordonnée :



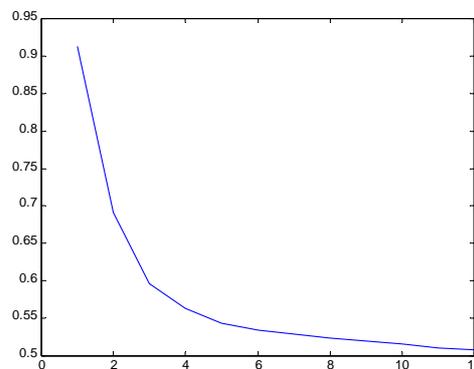
Module des coefficients d'ondelettes



Phase des coefficients d'ondelettes

En analysant le module, on constate que la densité d'énergie dans l'espace des ondelettes est organisée verticalement, selon des cônes qui pointent sur les instants où le signal a un comportement quasi-singulier (à la plus petite échelle accessible, celle-ci dépendant du taux d'échantillonnage et de la fréquence k_ψ de l'ondelette choisie). Cette structure est caractéristique d'un comportement intermittent dominé par des événements cohérents, ayant une forte densité d'énergie organisée sur une grande gamme d'échelles mais ne persistant que pendant des temps courts, tel celui produit à l'instant $t=900$. Ce comportement est très différent d'un comportement ondulatoire, pour lequel la densité d'énergie dans l'espace des ondelettes est organisée en bandes horizontales caractérisant les ondes présentes dans le signal. On remarque en particulier que les deux fréquences dominantes dans le spectre (autour de $k=90$ et 120) n'apparaissent pas de façon organisée quand on analyse le module des coefficients d'ondelettes, mais qu'elles résultent de la contribution à ces fréquences de plusieurs événements cohérents.

L'algorithme d'extraction des événements cohérents converge après 12 itérations et la valeur du seuil est $T=0.5$:

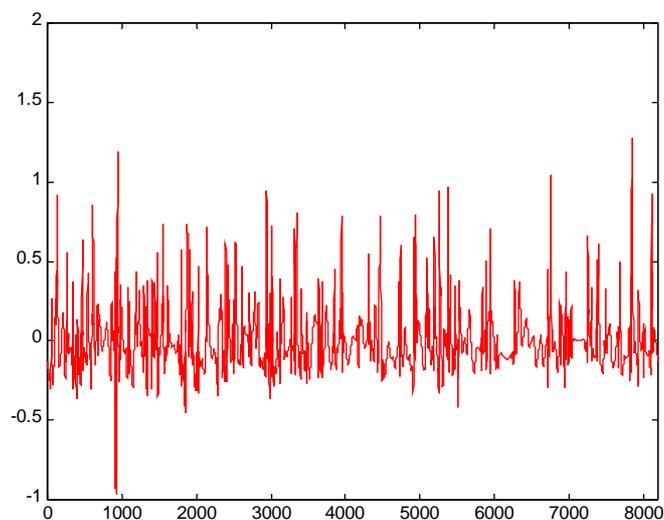


Valeurs du seuil en fonction de l'itération

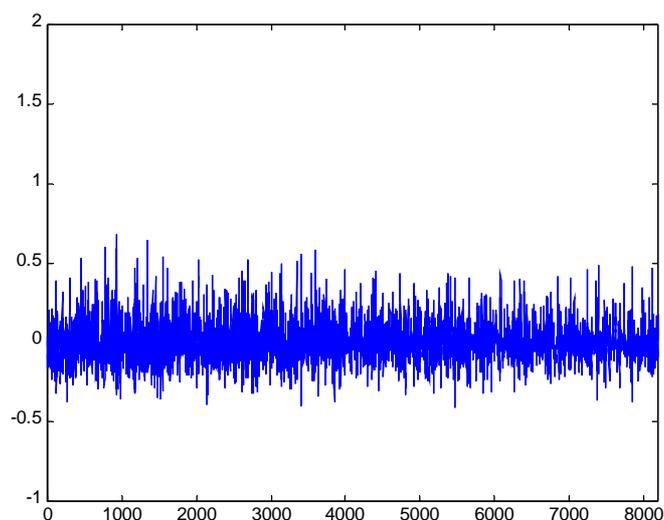
On constate que la convergence est très rapide car dès la troisième itération on est très proche du seuil retenu. En effet, on obtient pour chaque itération les valeurs suivantes :

$T_0 = 0.912903$	$T_5 = 0.534791$	$T_4 = 0.542917$	$T_9 = 0.515322$
$T_1 = 0.691556$	$T_6 = 0.529364$	$T_{10} = 0.510150$	
$T_2 = 0.596977$	$T_7 = 0.524051$	$T_{11} = 0.507883$	
$T_3 = 0.562973$	$T_8 = 0.519951$	$T_{12} = 0.507883$	

Nous obtenons les contributions cohérente et incohérente:



Contribution cohérente



Contribution incohérente

Nombre de coefficients retenus :

$$N_{\text{coh}} = 317 = 3.9\% N$$

$$N_{\text{inc}} = 7875 = 96.1\% N$$

Les variances sont :

$$\sigma_{\text{tot}}^2 = 0.046$$

$$\sigma_{\text{coh}}^2 = 0.032$$

$$\sigma_{\text{inc}}^2 = 0.014$$

Le taux de compression de la variance est : 70%

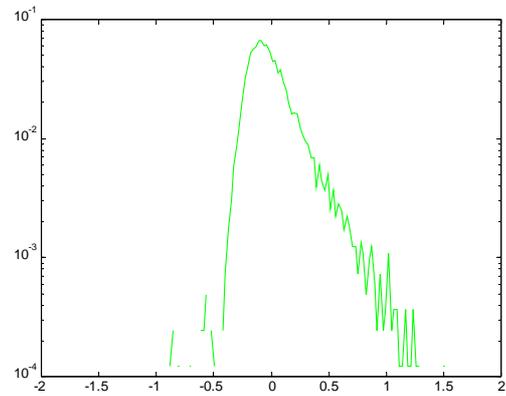
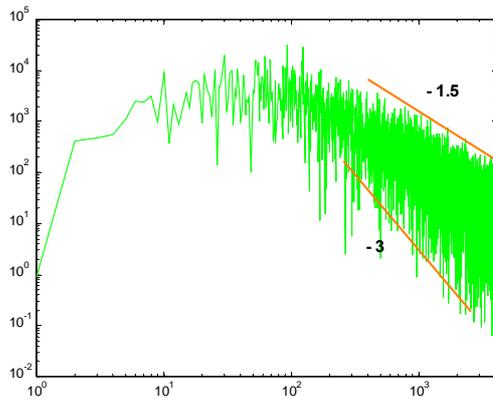
Le rapport signal sur bruit estimé est : 5.2 dB

L'analyse statistique des résultats nous donne :

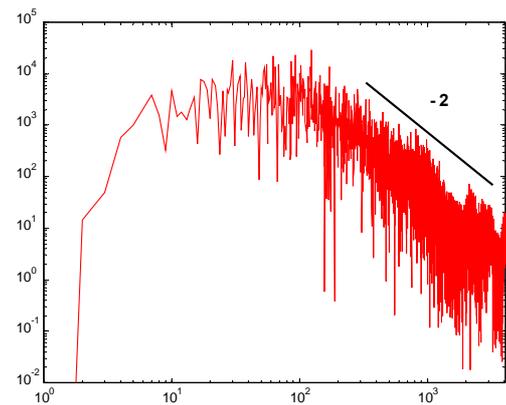
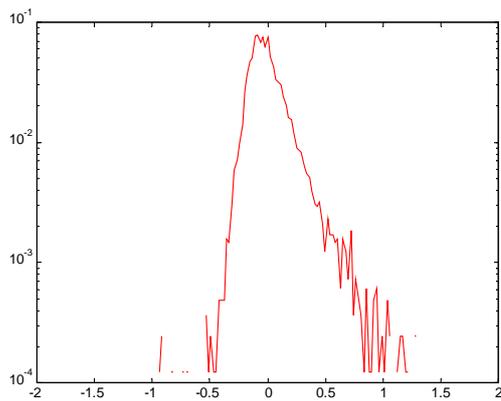
PDF

Spectre

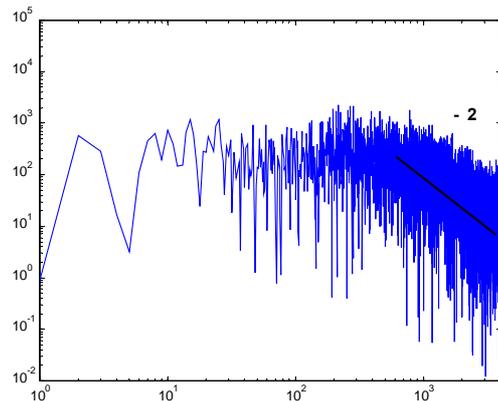
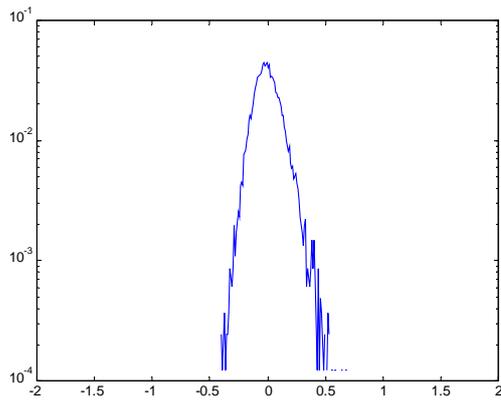
Signal total



Contribution cohérente



Contribution incohérente



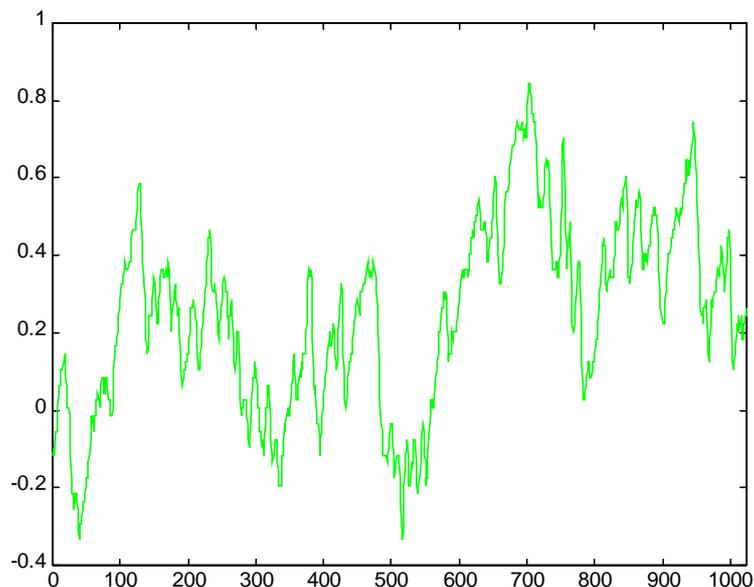
On constate que la partie cohérente retient 70% de la variance totale. Sa PDF est nettement asymétrique, comme celle du signal total, et a un comportement exponentiel, aussi bien pour les valeurs positives que pour celles négatives. On a ainsi extrait des événements cohérents intermittents qui contribuent avec une loi en $p(x)=e^{(-2x)}$ pour les valeurs positives, comme le signal total, et en $p(x)=e^{(+4x)}$ pour les valeurs négatives, qui avaient une PDF Gaussienne pour le signal total. Le spectre d'énergie cohérente présente le même comportement en loi de puissance que celui du signal total. En ce qui concerne la partie incohérente, elle contribue pour 30% à la variance totale et son comportement est beaucoup moins intermittent que celui du signal total. Sa PDF est symétrique et présente un comportement Gaussien similaire à la contribution des valeurs négatives du signal total. On a obtenu une bonne décorrélation de l'énergie incohérente, car le comportement en k^0 va de $k=1$ à $k=500$, alors qu'il s'arrête à $k=100$ pour le signal total et la partie cohérente. Le rapport signal sur bruit estimé est de 5.2 dB. L'importance du bruit pour ce signal est tel que nous ne pouvons pas dans ce cas garantir la qualité de l'extraction des événements cohérents.

Machine torique Blaumann, Trondheim

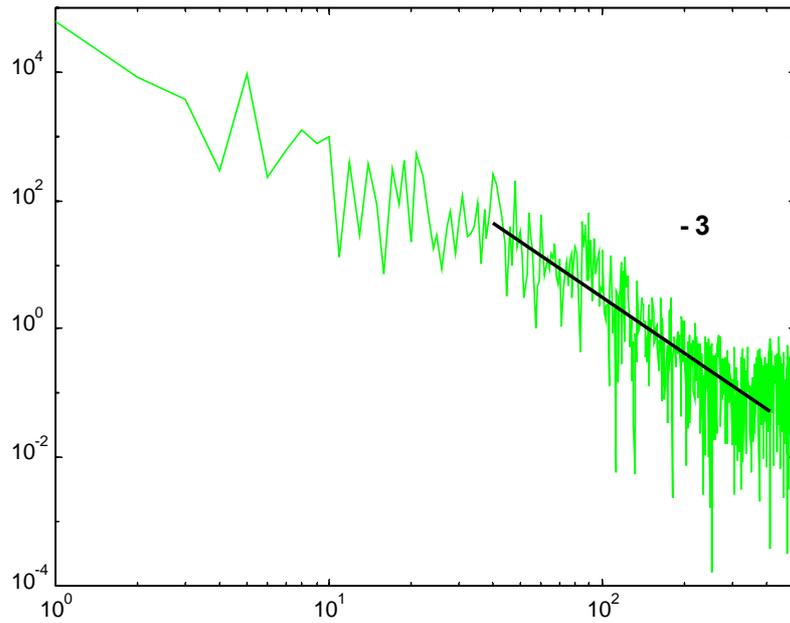
Nous avons analysé un signal qui provient de plusieurs sondes de Langmuir placées le long d'une section poloïdale sur la machine torique Blaumann qui se trouve à Trondheim (Norvège). Ces sondes mesurent l'évolution temporelle de la densité des ions présents dans le plasma. Le but de cette expérience est la mise en évidence des structures cohérentes qui se forment dans le plasma sous l'effet de la turbulence.

Nous avons traité 650 signaux, chacun échantillonné sur $N=2^{10}=1024$ points, qui correspondent à différentes positions des sondes utilisées.

Nous présentons ici, à titre d'exemple, la première série temporelle (signal S1) qui correspond à la première position de la sonde :



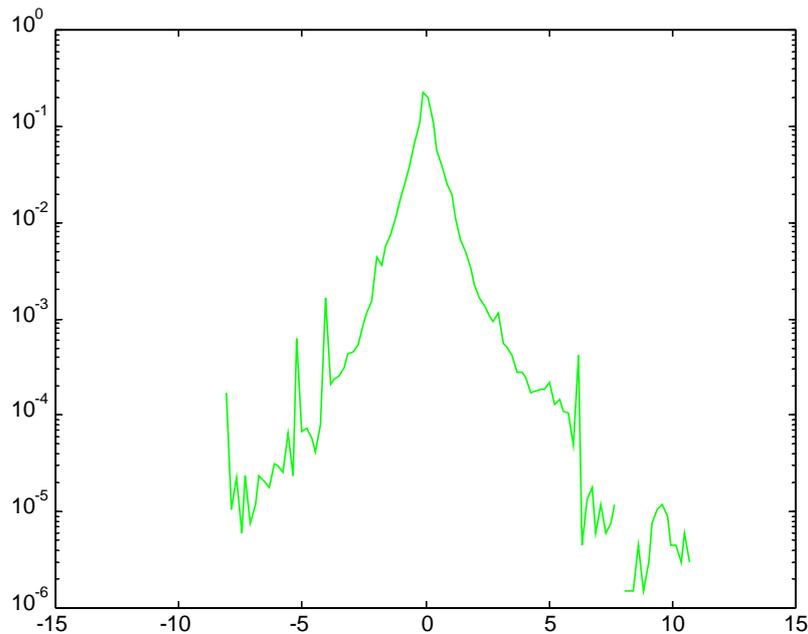
Signal S1 échantillonné sur $N=2^{10}=1024$ points



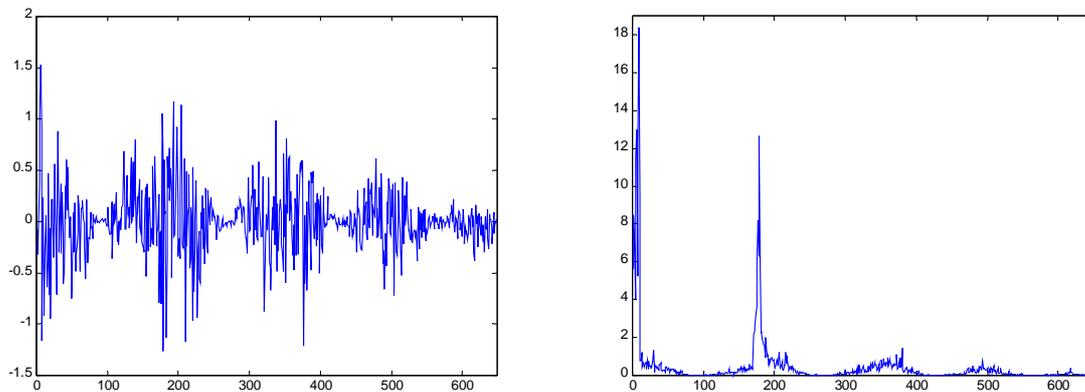
Spectre du signal S1

Le spectre d'énergie présente un comportement en k^{-3} va à toutes les fréquences.

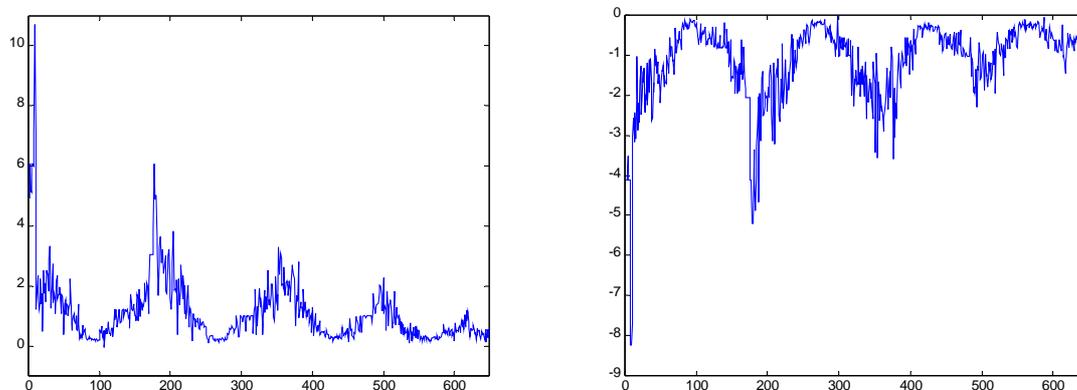
Comme nous disposons de 650 signaux, nous avons effectuées les statistiques suivantes sur l'ensemble de tous les signaux :



PDF de tous les signaux
(Statistique accumulée à partir des 650 signaux de 1024 points)



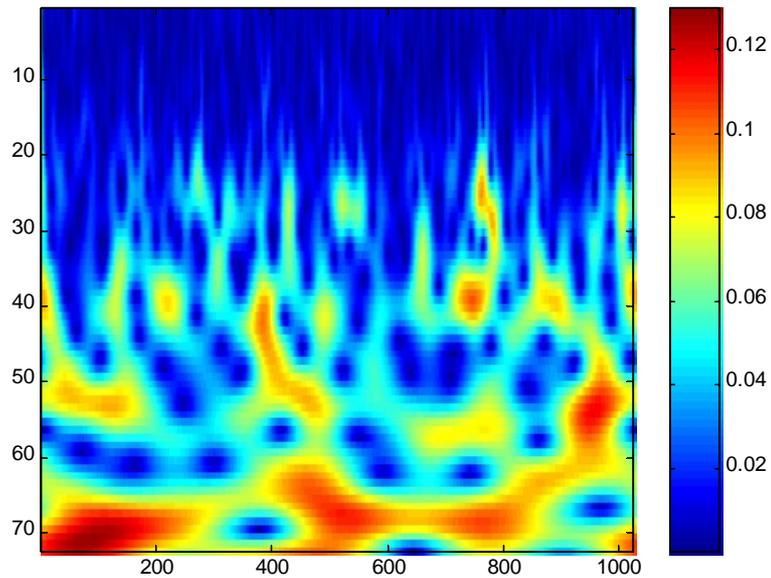
Moyenne et variance des 650 signaux



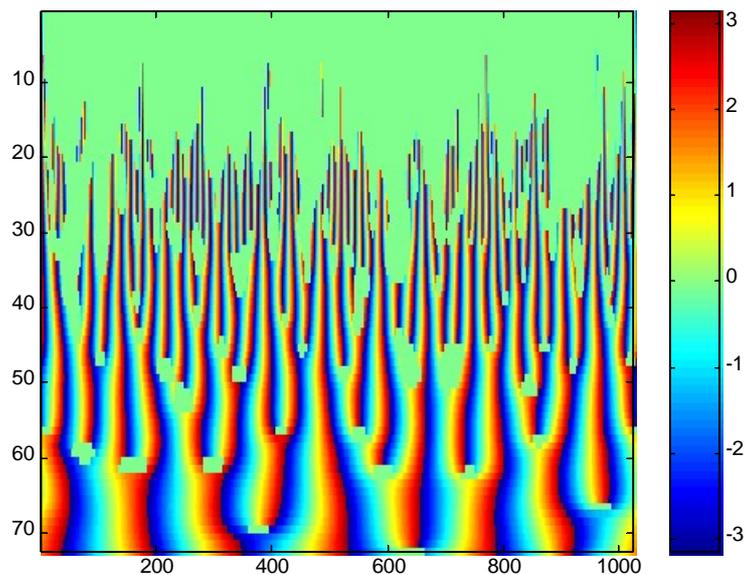
Maxima et minima des 650 signaux

On constate que les 650 signaux présentent des statistiques très différentes les uns des autres, ce qui correspond aux pics que l'on observe dans la PDF. Ceci nous montre que la série des 650 signaux n'est pas statistiquement homogène, ce qui nous confirme le fait qu'il faut traiter chaque signal séparément.

La transformée en ondelettes continue du signal S1 nous donne :



Module des coefficients d'ondelettes



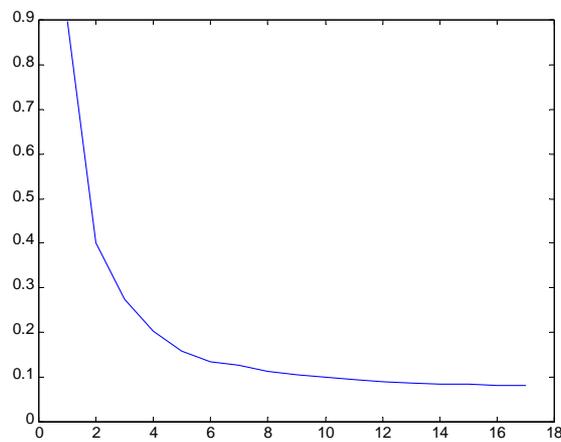
Phase des coefficients d'ondelettes

Le module des coefficients d'ondelettes présente à grande échelle des structures horizontales qui dénotent un comportement de type ondulatoire, tandis qu'à petite échelle l'énergie est organisée en structures verticales qui pointent sur les événements cohérents. Aux basses fréquences le signal semble dominé par des ondes dont les lois de modulation de fréquence évoluent lentement au cours du temps.

On observe une succession de glissements vers les hautes fréquences (de type whistle) de $t=0$ à $400 \Delta t$, puis de $t=800$ à $100 \Delta t$, ainsi que des glissements allant vers les basses fréquences de $t=400$ à 600 . Pour caractériser ces lois de modulation de fréquence, il faudrait calculer les crêtes (ridges) des coefficients d'ondelettes (cf. *S. Mallat, A wavelet tour of signal processing, Academic Press, 1998*). En ce qui concerne les événements cohérents que l'on détecte à petite échelle, les plus importants se produisent autour des instants $t=175, 250, 380, 520, 790, 860, 900$ et 1000 .

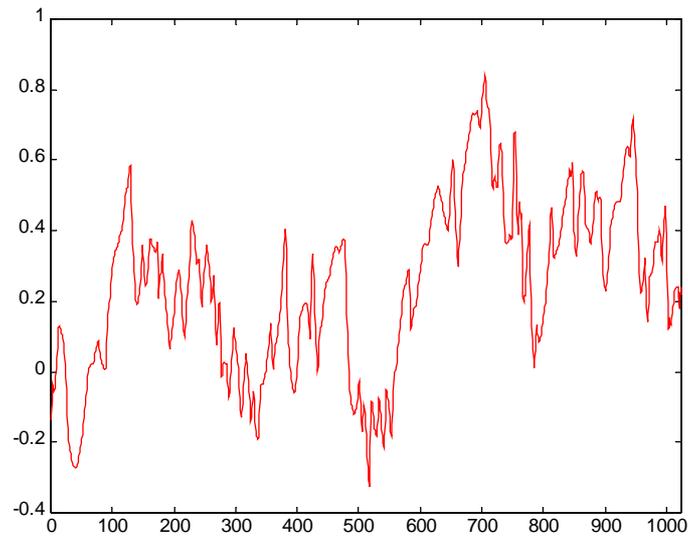
Nous appliquons l'algorithme itératif d'extraction des événements cohérents au signal S1. La valeur optimale du seuil, $T=0.08$, est atteinte après 17 itérations :

$T_0 = 0.896$	$T_{11} = 0.090$
$T_1 = 0.401$	$T_{12} = 0.087$
$T_2 = 0.273$	$T_{13} = 0.085$
$T_3 = 0.202$	$T_{14} = 0.084$
$T_4 = 0.157$	$T_{15} = 0.082$
$T_5 = 0.135$	$T_{16} = 0.080$
$T_6 = 0.125$	$T_{17} = 0.080$
$T_7 = 0.113$	
$T_8 = 0.106$	
$T_9 = 0.099$	
$T_{10} = 0.094$	

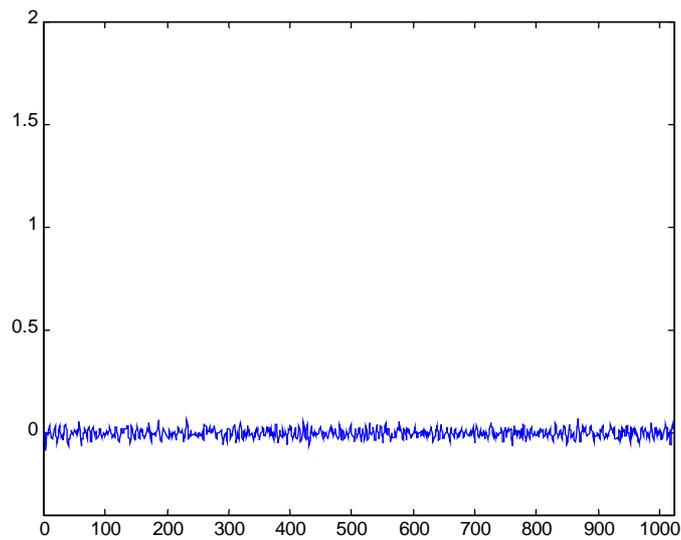


Valeurs du seuil en fonction de l'itération

Nous obtenons pour le signal S1 les contributions cohérente et incohérente :



Contribution cohérente

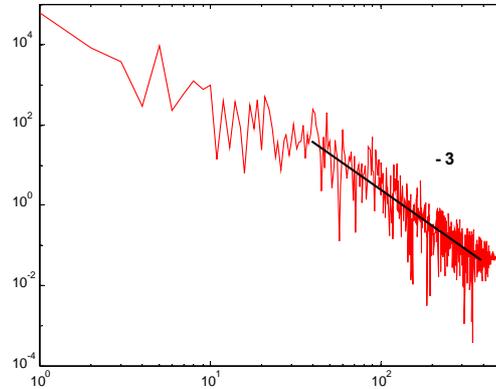
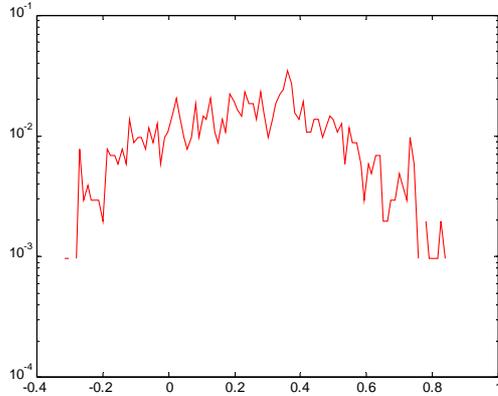


Contribution incohérente

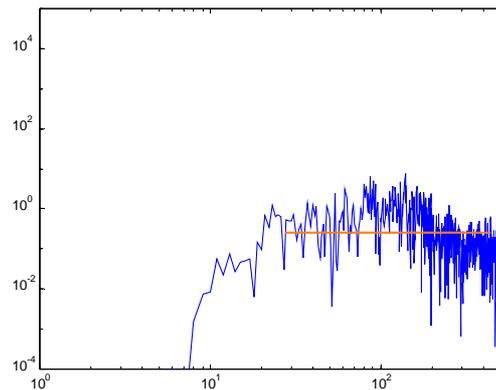
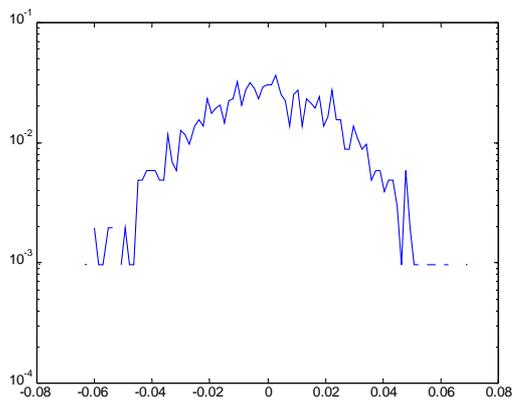
PDF

Spectre

Partie cohérente



Partie incohérente



Nombre de coefficients retenus :

$$N_{\text{coh}} = 155 = 15.1\% N$$

$$N_{\text{inc}} = 869 = 84.9\% N$$

Les variances sont :

$$\sigma_{\text{tot}}^2 = 0.058 \quad \sigma_{\text{coh}}^2 = 0.0575 \quad \sigma_{\text{inc}}^2 = 4.72 \cdot 10^{-4}$$

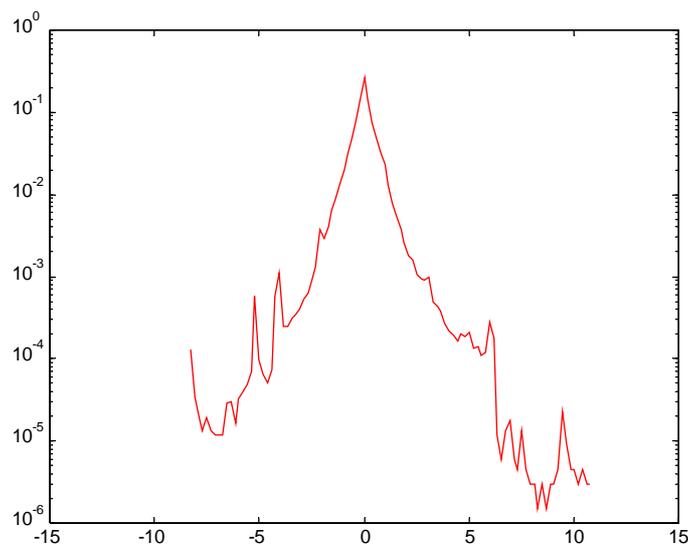
Le taux de compression de la variance est : 99.19%

Le rapport signal sur bruit estimé est : 21 dB

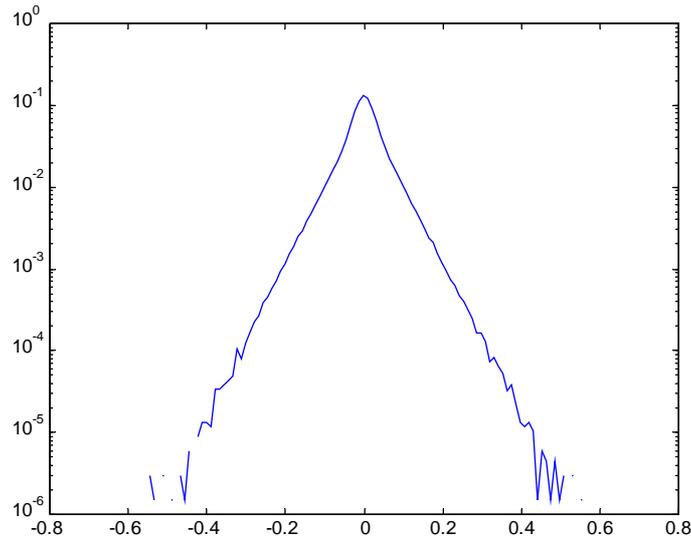
On constate que la partie cohérente retient 99% de la variance totale, ce qui montre que celle-ci domine le signal. Son spectre présente le même comportement en k^{-3} que le signal total, tandis-que la partie incohérente n'a pas d'énergie entre $k=1$ et 10 et ensuite présente un spectre en k^0 montrant que l'énergie incohérente est quasi équirépartie entre $k=10$ et 512 . Le rapport signal sur bruit estimé est de 21 dB , ce qui garantit la qualité de l'extraction des événements cohérents.

Comme nous ne disposons que de 1024 échantillons pour évaluer statistiquement le signal S1 ainsi que ses parties cohérente et incohérente, les histogrammes obtenus ne donnent pas une très bonne estimation des PDFs. C'est la raison pour laquelle nous proposons de recalculer ceux-ci à partir des 650×1024 échantillons dont on dispose, en considérant les 650 signaux comme une seule série. En principe cette estimation est meilleure car on a plus de données, mais ceci reste cependant discutable car on a vu précédemment que celles-ci ne pas statistiquement homogènes.

Nous avons donc calculé les PDF de la partie cohérente et incohérente de la totalité des 650 signaux et obtenu :



PDF de la partie cohérente
(Statistique effectuée sur 650 signaux de 1024 points)



PDF de la partie incohérente
(Statistique effectuée sur 650 signaux de 1024 points) .

Nous constatons que la PDF des 650 contributions cohérentes accumulées est la même que celle des 650 signaux de départ, avec exactement les mêmes pics. Par contre, la PDF des 650 contributions incohérentes accumulées est très différente, avec un comportement exponentiel, en $p(x)=e^{(-x/2)}$ pour les valeurs positives et en $p(x)=e^{(x/2)}$ pour les valeurs négatives, avec une variabilité très réduite (de -0.5 à $+0.5$) par rapport à celle des signaux de départ (de -10 à $+10$). Ce résultat permet de supposer que le bruit extrait, qui correspond à la contribution incohérente, est indépendant de la position des sondes utilisées.

Tokamak Castor, Prague

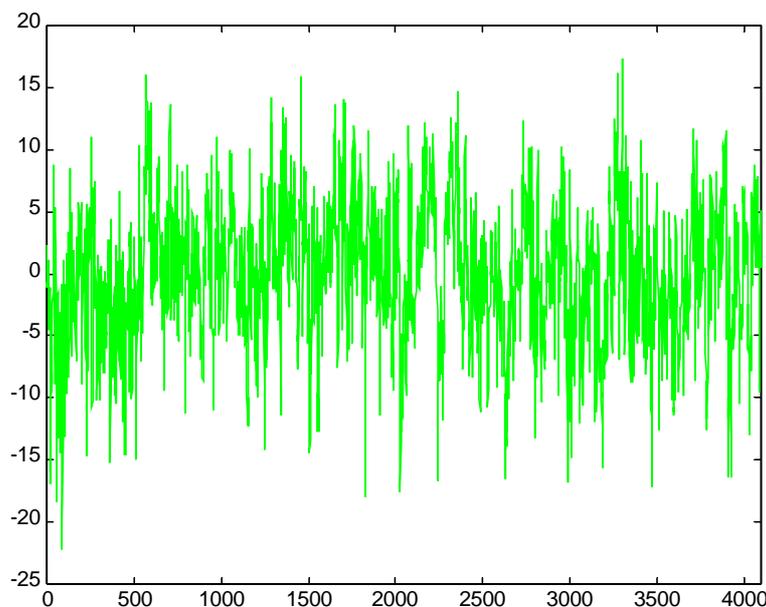
Nous avons analysé quatre signaux mesurés à partir de plusieurs sondes de Langmuir placées en quatre endroits différents d'une section poloidale du Tokamak Castor qui se trouve à Prague (Tchéquie).

Ces sondes mesurent l'évolution temporelle de la densité des ions présents au bord du plasma. Tout comme dans le cas précédant, le but de cette expérience est la mise en évidence des événements cohérents qui apparaissent dans le plasma de bord.

Nous constatons que les variances des signaux sont très différentes les uns des autres (allant de 9 à 30). Toutefois leur comportement spectral est semblable, avec un spectre en k^0 jusqu'à $k=100$ et entre $k^{-2.5}$ et $k^{-3.5}$ au-delà. Les PDFs des trois premiers signaux sont très asymétriques, contrairement à celle du dernier qui est quasi Gaussienne.

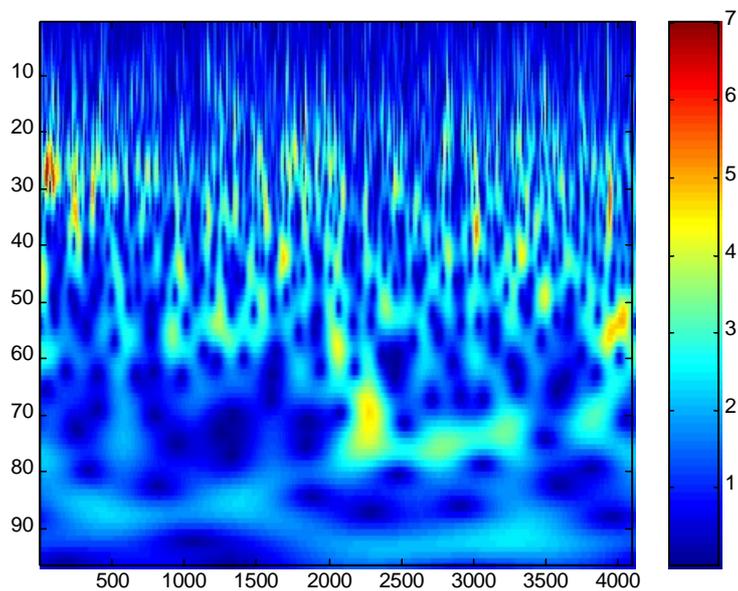
- *Signal de la première sonde*

Le signal S1 est mesuré par la première sonde et échantillonné sur $N=2^{12}=4096$ points :

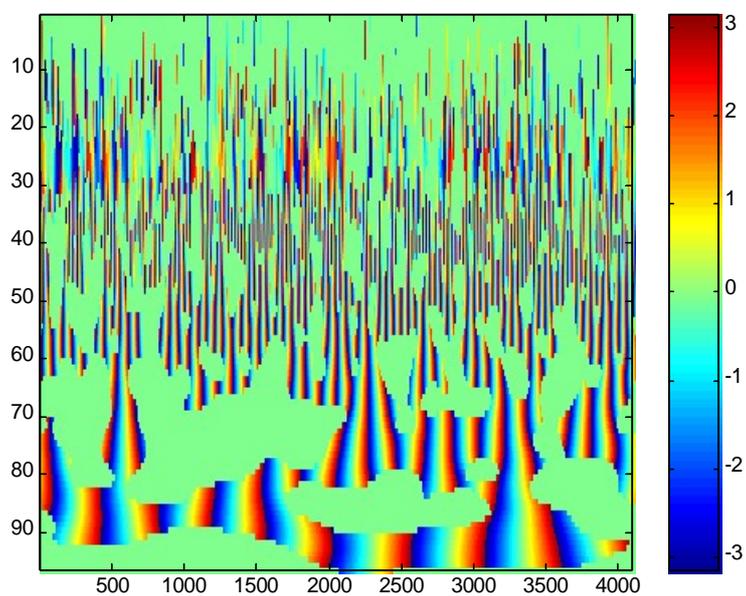


Signal S1 sur $N=2^{12}=4096$ points

La transformée en ondelettes continue de S1 est :



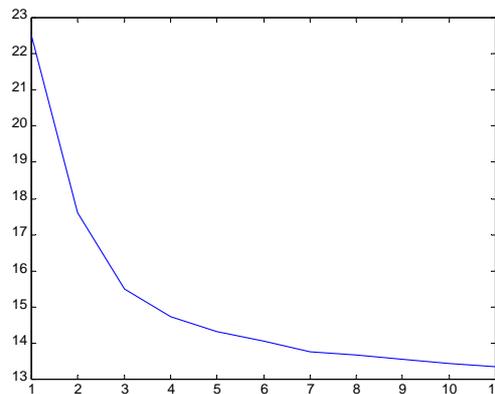
Module des coefficients d'ondelettes



Phase des coefficients d'ondelettes

Le module des coefficients d'ondelettes présente à grande échelle des structures horizontales qui dénotent un comportement de type ondulatoire, tandis qu'à petite échelle l'énergie est organisée en structures verticales qui pointent sur les événements cohérents. Aux basses fréquences le signal semble dominé par des ondes dont les lois de modulation de fréquence évoluent lentement au cours du temps. On observe en particulier un doublement de fréquence autour de l'instant $t=1500$, puis des glissements rapides vers les hautes fréquences (de type whistle) à partir de $t=2000$ et $t=3500$. Pour caractériser ces lois de modulation de fréquence, il faudrait calculer les crêtes (ridges) des coefficients d'ondelettes (cf. *S. Mallat, A wavelet tour of signal processing, Academic Press, 1998*). En ce qui concerne les événements cohérents que l'on détecte à petite échelle, les plus importants se produisent autour des instants $t=450, 1100, 1600, 2650$ et 3700 .

Nous appliquons l'algorithme itératif d'extraction des événements cohérents. La valeur optimale du seuil, $T=13.35$, est atteinte après 11 itérations :

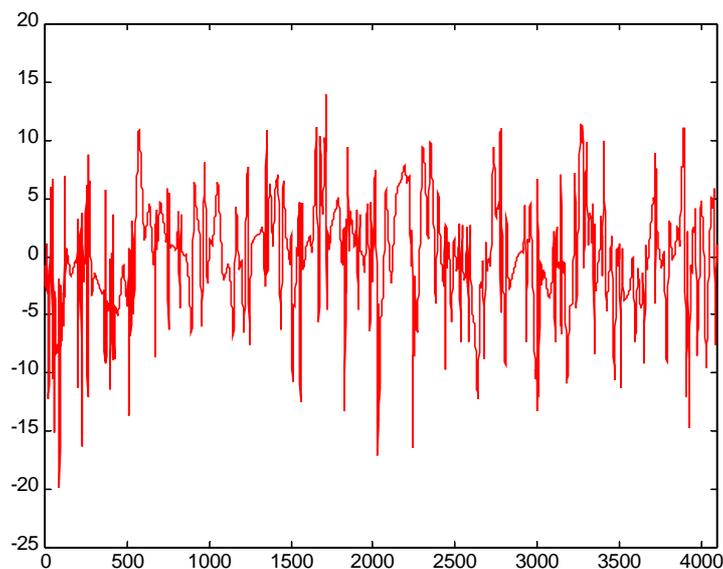


Valeurs du seuil en fonction de l'itération

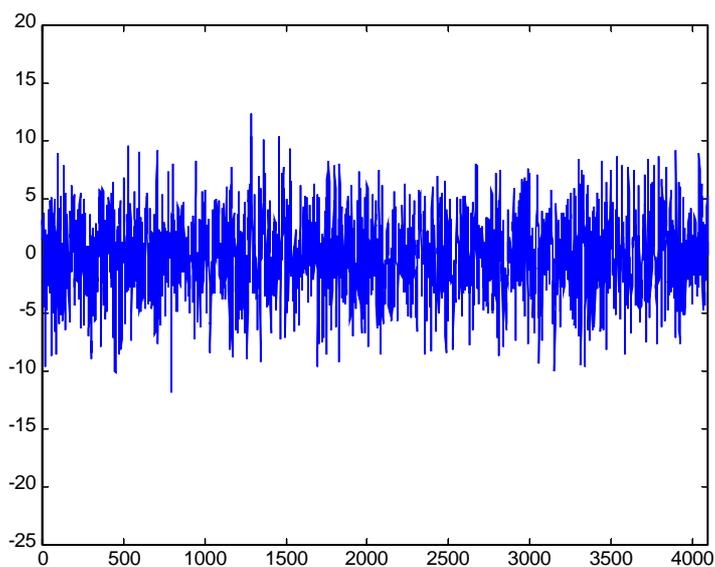
Les différents seuils itérés sont :

$T_1 = 17.605506$	$T_7 = 13.661363$
$T_2 = 15.496704$	$T_8 = 13.548876$
$T_3 = 14.732619$	$T_9 = 13.437636$
$T_4 = 14.312419$	$T_{10} = 13.354667$
$T_5 = 14.041214$	$T_{11} = 13.354667$
$T_6 = 13.775805$	

Nous obtenons pour le signal S1 les contributions cohérente et incohérente :



Contribution cohérente



Contribution incohérente

Nombre de coefficients retenus:

$$N_{\text{coh}} = 154 = 3.8\% N$$

$$N_{\text{inc}} = 3942 = 96.2\% N$$

Les variances sont :

$$\sigma_{\text{tot}}^2 = 30.419$$

$$\sigma_{\text{coh}}^2 = 19.699 \quad \sigma_{\text{inc}}^2 = 10.721$$

Le taux de compression de la variance est : 64.7%

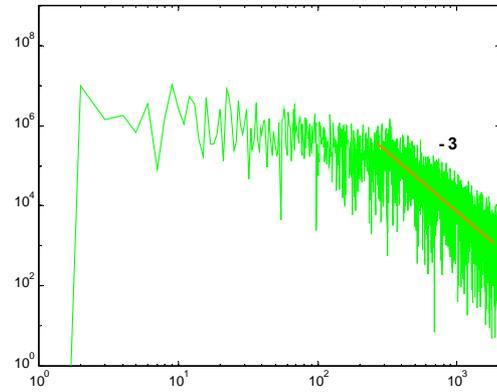
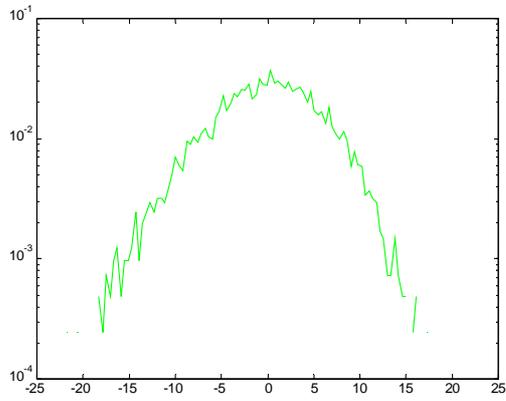
Le rapport signal sur bruit estimé est : 4.6 dB

L'analyse statistique des résultats nous donne :

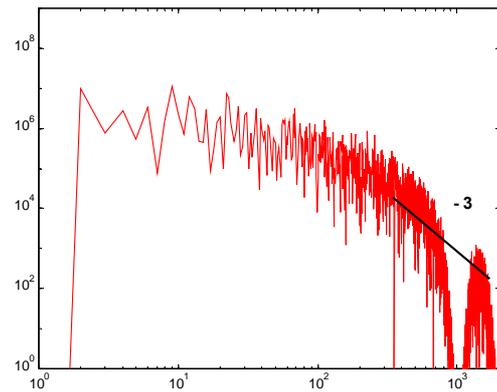
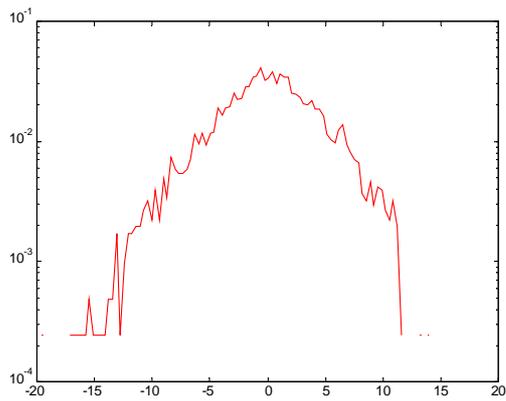
PDF

Spectre

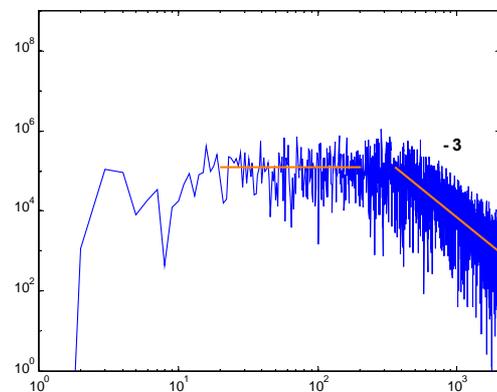
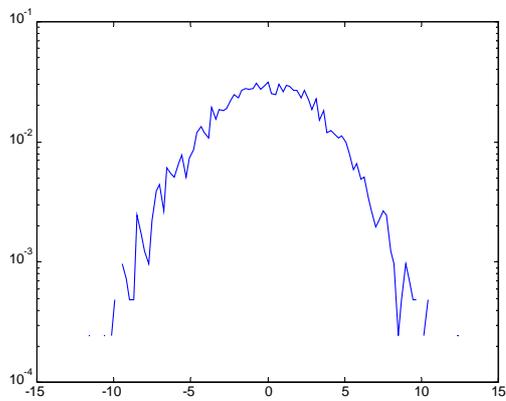
Signal S1 total



Contribution cohérente



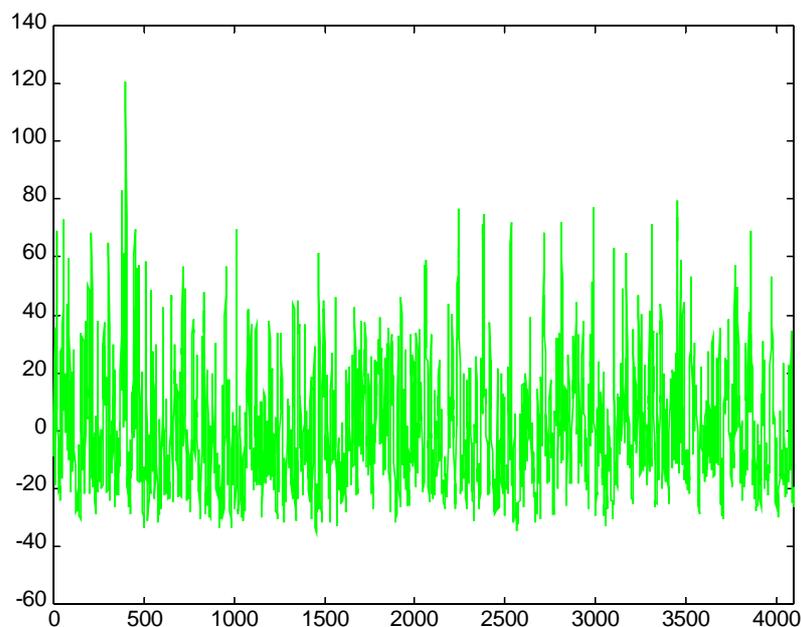
Contribution incohérente



L'extraction des événements cohérents n'est pas très fiable pour le signal S1, car le rapport signal sur bruit estimé n'est que de 4.6 dB . On constate cependant que la contribution cohérente présente bien un comportement intermittent, où se produisent des événements distincts, ceux les plus intenses étant espacés d'une durée d'environ $200 \Delta t$. La contribution incohérente est par contre non intermittente et fluctue sur des durées très courtes. Ces différents comportements se retrouvent quand on étudie les pentes spectrales. En effet, la contribution cohérente présente un comportement en k^{-3} , semblable à celui du signal total, à partir de $k=10$, qui correspond bien à une corrélation sur des durées de l'ordre de $200 \Delta t$. La contribution incohérente a pour sa part un spectre en k^0 jusqu'à $k=400$, et ensuite une décroissance en k^{-3} , ce qui correspond à une corrélation sur des durées inférieures à $5 \Delta t$. En ce qui concerne les PDFs, elles sont asymétriques pour le signal total et comme pour la contribution cohérente, tandis que la PDF de la contribution incohérente est symétrique. L'analyse statistique des résultats montre que, malgré l'importance du bruit qui représente 35.3% de la variance totale, les événements cohérents extraits semblent significatifs, car la contribution incohérente que nous avons éliminée est quasi Gaussienne et corrélée sur des durées 40 fois plus courtes que la contribution cohérente.

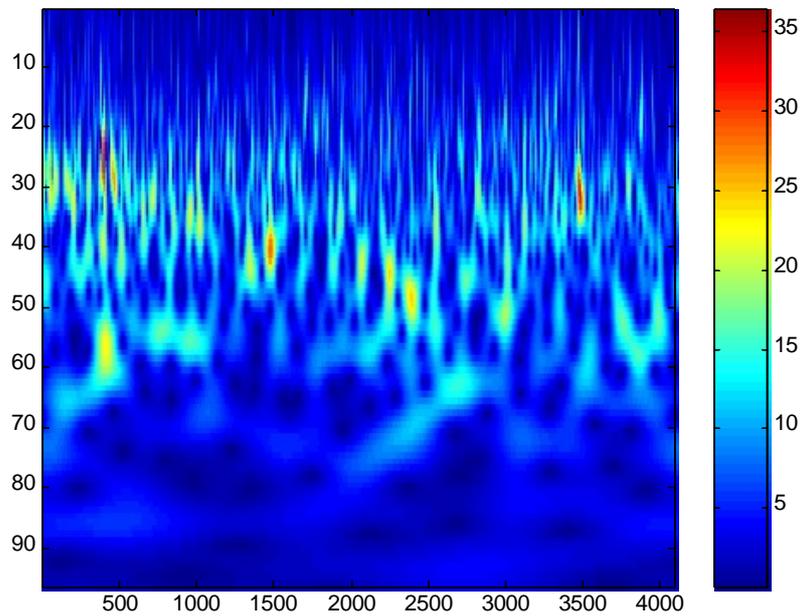
- ***Signal de la seconde sonde***

Le signal S2 est mesuré par la deuxième sonde et échantillonné sur $N=2^{12}=4096$ points :

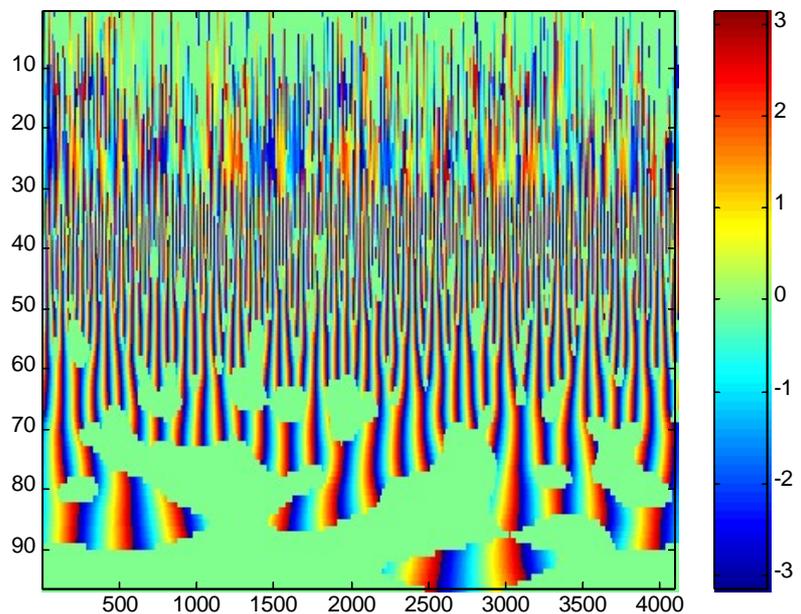


Signal S2 sur $N_{tot}=2^{12}=4096$ points

La transformée en ondelettes continue du signal S2 est :



Module des coefficients d'ondelettes

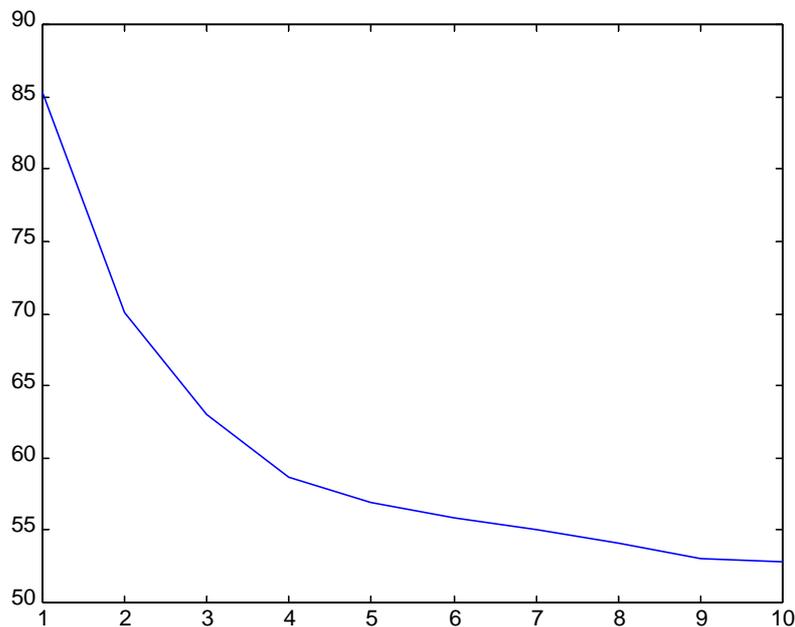


Phase des coefficients d'ondelettes

Le module des coefficients d'ondelettes présente à moyenne échelle des structures diagonales qui correspondent à des ondes, de type whistle, dont la fréquence accélère pendant une durée d'environ $700 \Delta t$ (Δt étant l'unité d'échantillonnage temporel), puis décélère pendant un durée d'environ $300 \Delta t$.

Pour caractériser plus précisément ces lois de modulation de fréquence, il faudrait calculer les crêtes (ridges) des coefficients d'ondelettes (cf. *S. Mallat, A wavelet tour of signal processing, Academic Press, 1998*). On observe qu'à petite échelle l'énergie est organisée en structures verticales qui pointent sur les événements cohérents, les plus intenses se produisant autour des instants $t=480$, 3450 , 3500 et 3850 .

Nous appliquons l'algorithme itératif d'extraction des événements cohérents au signal S2. La valeur optimale du seuil, $T=52$, est atteinte après 10 itérations :



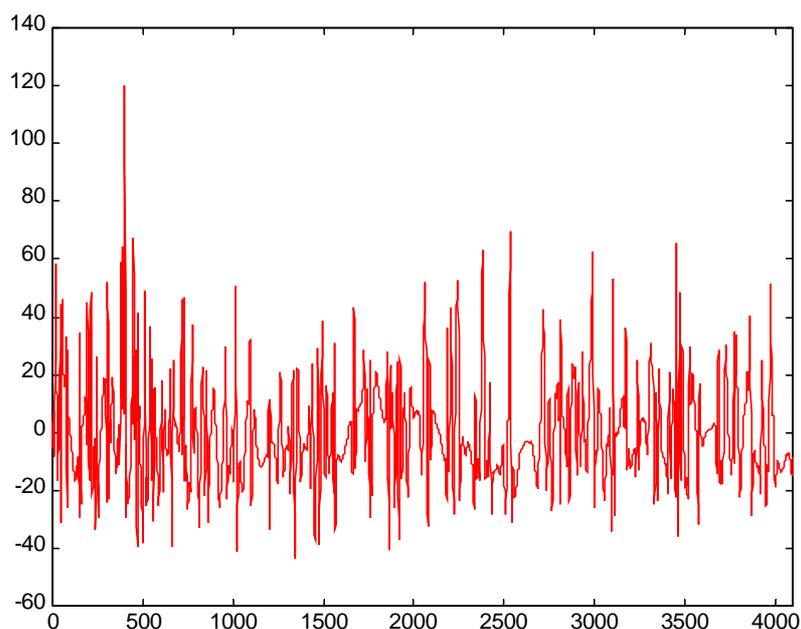
Valeurs du seuil en fonction de l'itération

Les différents seuils itérés sont :

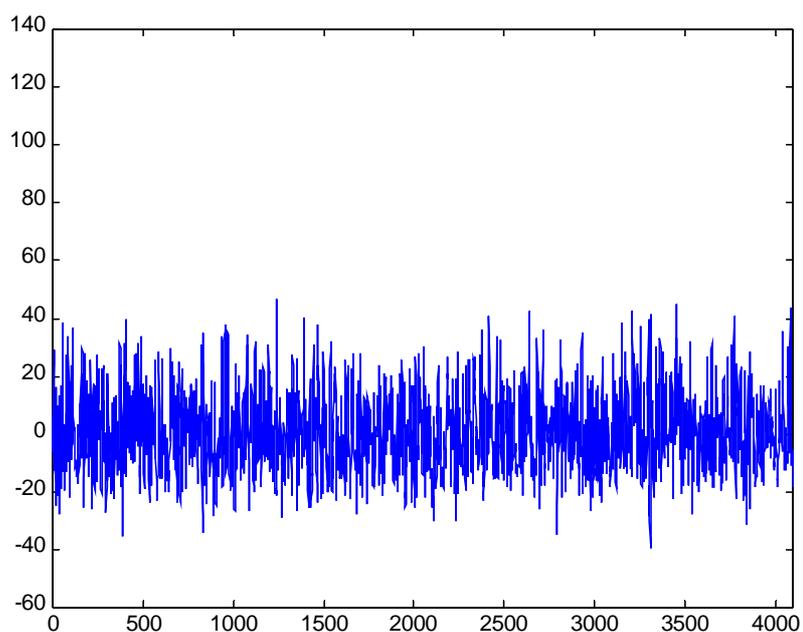
$T_0 = 85.360645$
 $T_1 = 70.084046$
 $T_2 = 62.969907$
 $T_3 = 58.736975$
 $T_4 = 56.911943$
 $T_5 = 55.817311$

$T_6 = 55.003898$
 $T_7 = 54.086567$
 $T_8 = 53.073477$
 $T_9 = 52.855034$
 $T_{10} = 52.855034$

Nous obtenons pour le signal S2 les contributions cohérente et incohérente :



Contribution cohérente



Contribution incohérente

Nombre de coefficients retenus : $N_{\text{coh}} = 162 = 3.9\% N$
 $N_{\text{inc}} = 3934 = 96.1\% N$

Les variances sont :

$$\sigma_{\text{tot}}^2 = 438.005 \quad \sigma_{\text{coh}}^2 = 270.072 \quad \sigma_{\text{inc}}^2 = 167.933$$

Le taux de compression de la variance est : 61.7%

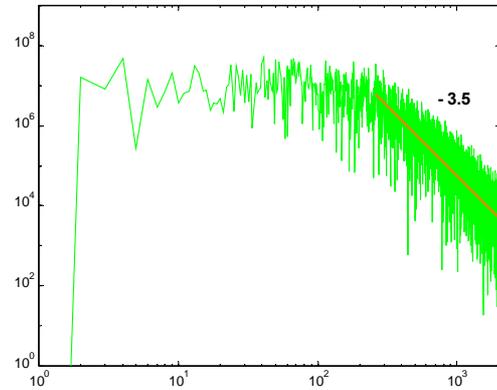
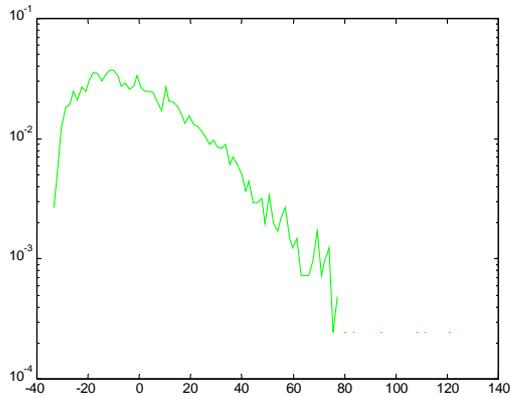
Le rapport signal sur bruit estimé est : 4.2 dB

L'analyse statistique des résultats nous donne :

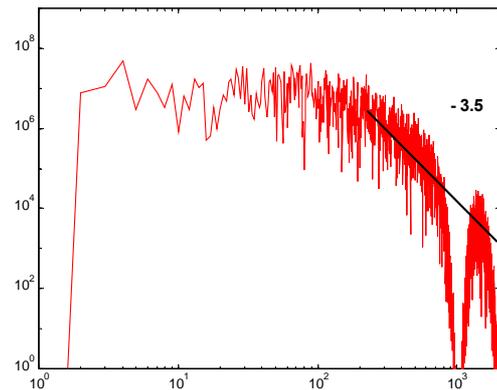
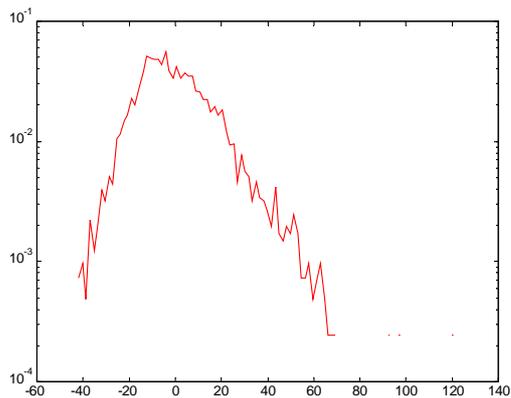
PDF

Spectre

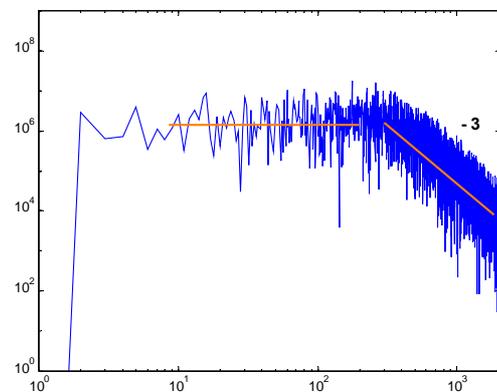
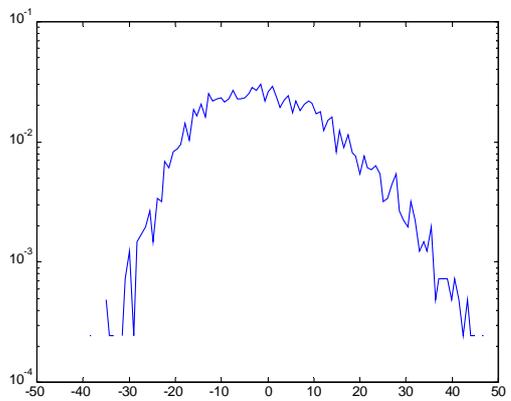
Signal S2 total



Contribution cohérente



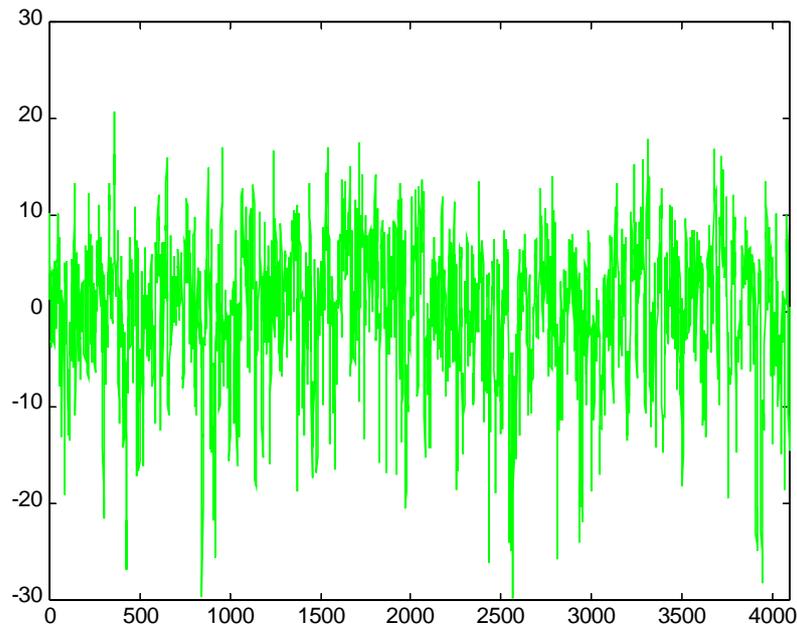
Contribution incohérente



L'extraction des événements cohérents n'est pas très fiable pour le signal S2, car le rapport signal sur bruit estimé n'est que de 4.2 dB . On constate cependant que la contribution cohérente présente bien un comportement intermittent, où se produisent des événements distincts, ceux les plus intenses étant espacés d'une durée d'environ $100 \Delta t$ et le plus intense ayant lieu à $t=400 \Delta t$. Par contre la contribution incohérente fluctue sur des durées très courtes. Ces différents comportements se retrouvent quand on étudie les pentes spectrales. En effet, la contribution cohérente présente un comportement en $k^{-3.5}$, semblable à celui du signal total, à partir de $k=20$, qui correspond bien à une corrélation sur des durées de l'ordre de $100 \Delta t$. La contribution incohérente a pour sa part un spectre en k^0 jusqu'à $k=400$, et ensuite une décroissance en k^{-3} , ce qui correspond à une corrélation sur des durées inférieures à $5 \Delta t$. En ce qui concerne les PDFs, elles sont toutes asymétriques, bien que celle-ci soit nettement moins prononcée pour la contribution incohérente. L'analyse statistique des résultats montre que, malgré l'importance du bruit qui représente 38.3% de la variance totale, les événements cohérents extraits semblent significatifs, car la contribution incohérente que nous avons éliminée est corrélée sur des durées 20 fois plus courtes que la contribution cohérente.

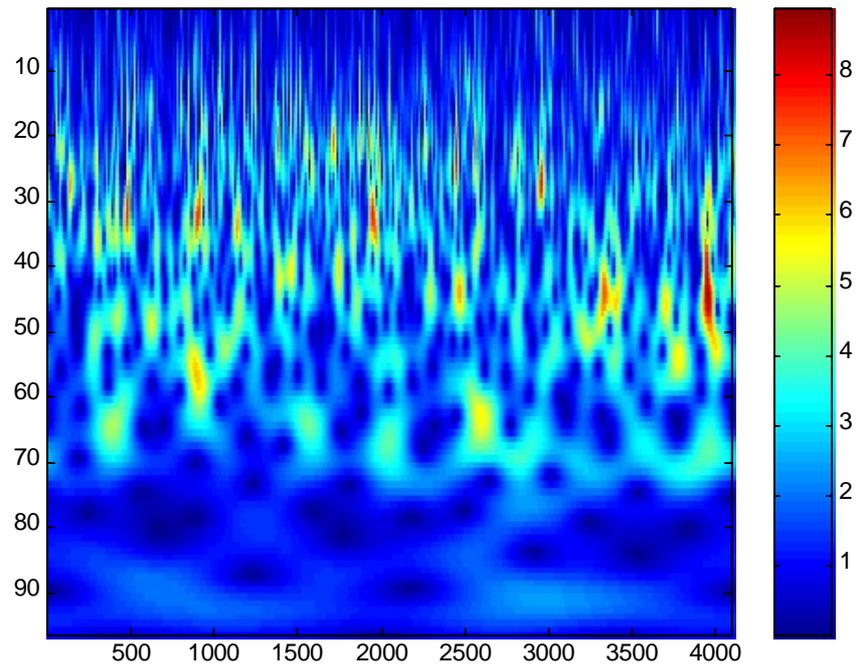
- **Signal de la troisième sonde**

Le signal S3 est mesuré par la troisième sonde et échantillonné sur $N=2^{12}=4096$ points :

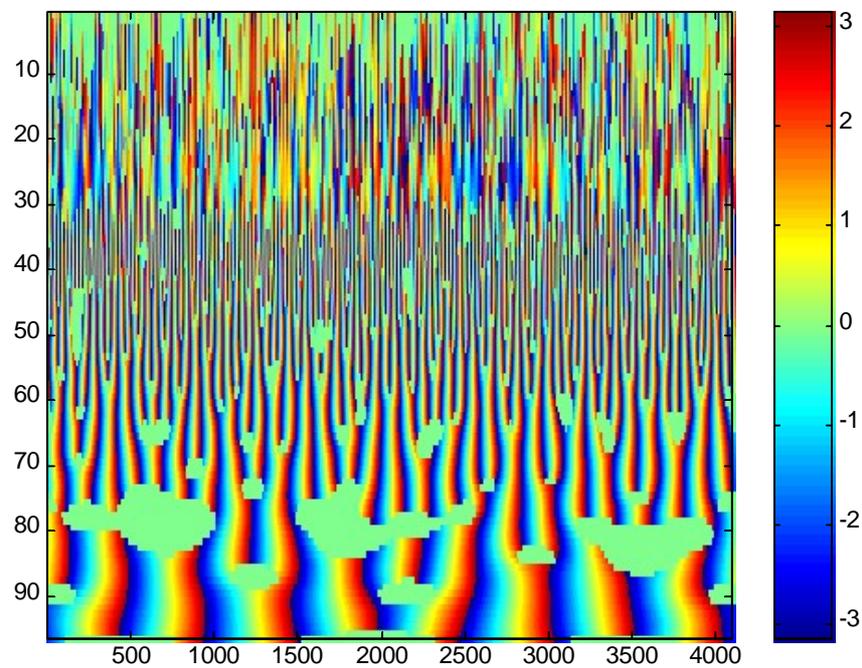


Signal S3 sur $N=2^{12}=4096$ points

La transformée en ondelettes continue du signal S3 est :



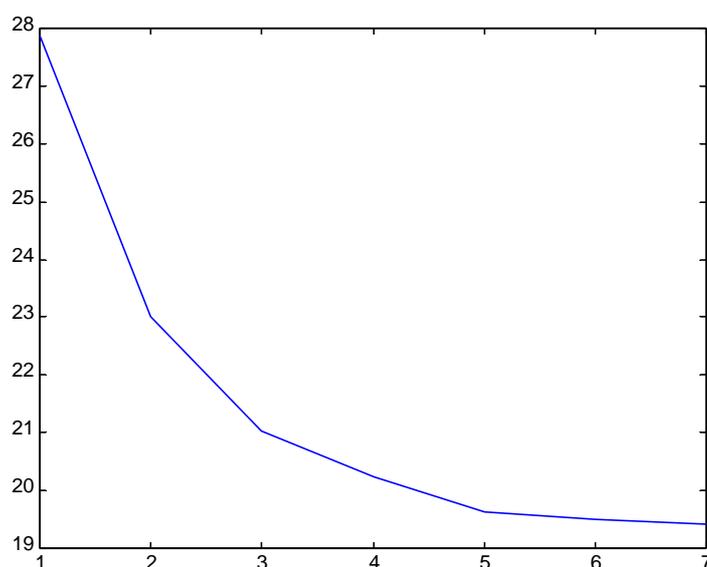
Module des coefficients d'ondelettes



Phase des coefficients d'ondelettes

Le module des coefficients d'ondelettes présente à grande échelle des structures horizontales qui dénotent un comportement de type ondulatoire, tandis qu'à petite échelle l'énergie est organisée en structures verticales qui pointent sur les événements cohérents. Aux basses fréquences le signal semble dominé par des ondes dont les lois de modulation de fréquence évoluent lentement au cours du temps, avec en particulier un doublement de fréquence autour de l'instant $t=2300$. A moyenne fréquence on observe une fréquence dominante, qui présente des battements, et une série de whistles qu'il faudrait mieux caractériser. En ce qui concerne les événements cohérents que l'on détecte à petite échelle, les plus importants se produisent autour des instants $t=450, 700, 1300, 3050$ et 3800 .

Nous appliquons l'algorithme itératif d'extraction des événements cohérents au signal S3. La valeur optimale du seuil, $T=19.4$, est atteinte après 7 itérations :



Valeurs du seuil en fonction de l'itération

Les différents seuils itérés sont :

$$T_0 = 27.856230$$

$$T_1 = 22.999682$$

$$T_2 = 21.031707$$

$$T_3 = 20.230967$$

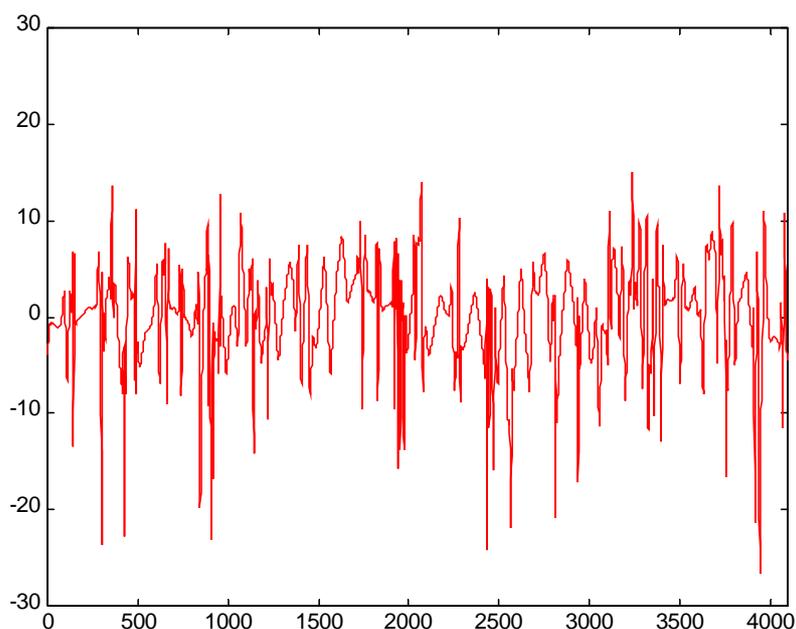
$$T_4 = 19.621300$$

$$T_5 = 19.497320$$

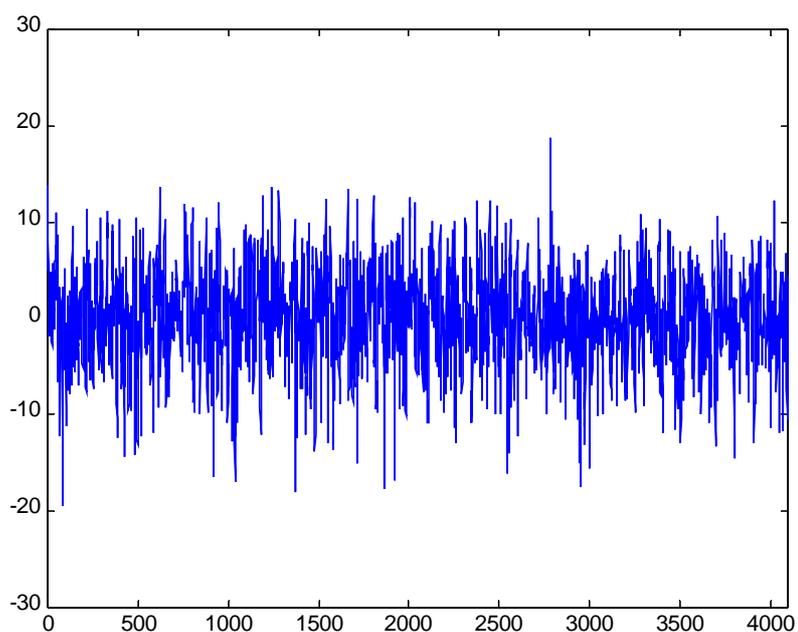
$$T_6 = 19.417454$$

$$T_7 = 19.417454$$

Nous obtenons pour le signal S3 les contributions cohérente et incohérente :



Contribution cohérente



Contribution incohérente

Nombre de coefficients retenus : $N_{\text{coh}} = 114 = 2.8\% N$
 $N_{\text{inc}} = 3982 = 97.2\% N$

Les variances sont :

$$\sigma_{\text{tot}}^2 = 46.645 \quad \sigma_{\text{coh}}^2 = 23.981 \quad \sigma_{\text{inc}}^2 = 22.665$$

Le taux de compression de la variance est : 51.4%

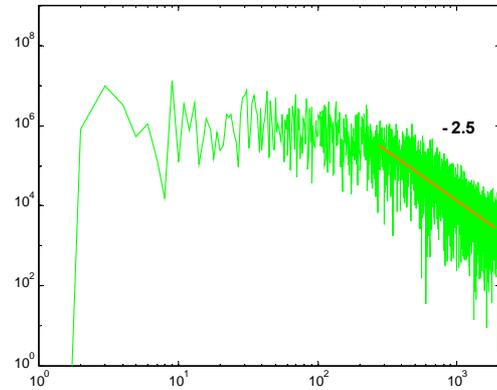
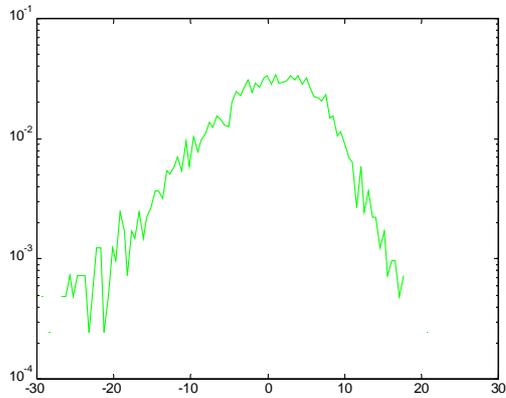
Le rapport signal sur bruit estimé est : 3.1 dB

L'analyse statistique des résultats nous donne :

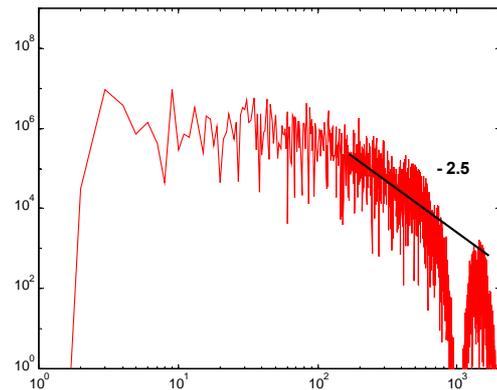
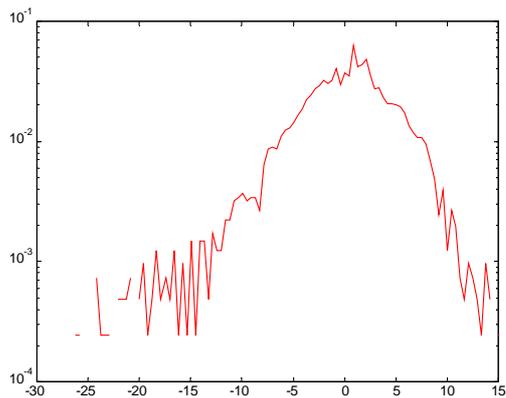
PDF

Spectre

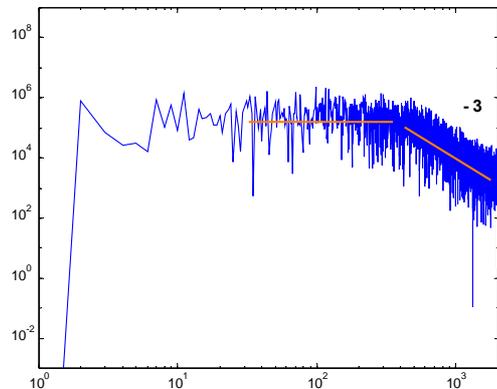
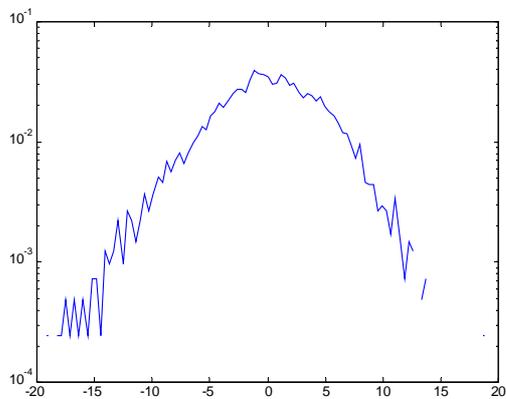
Signal S3 total



Contribution cohérente



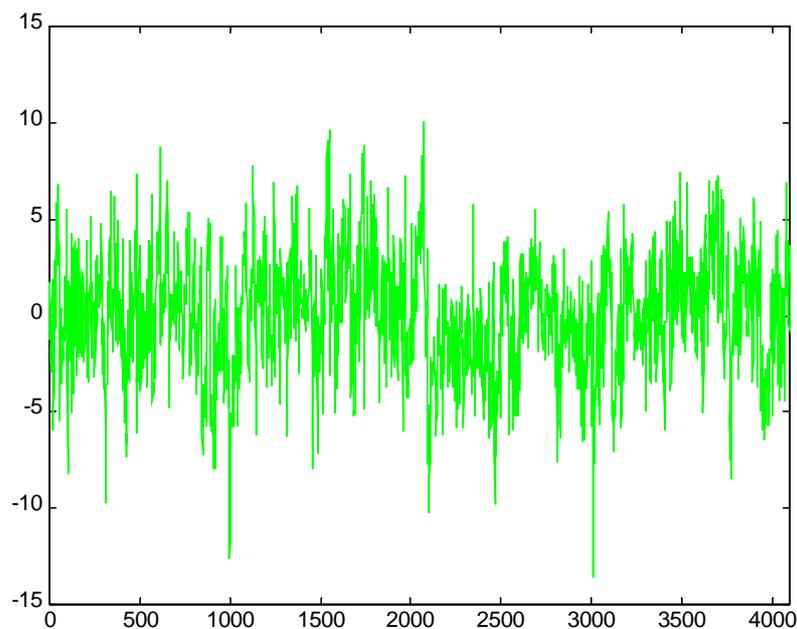
Contribution incohérente



L'extraction des événements cohérents n'est pas très fiable pour le signal S3, car le rapport signal sur bruit estimé n'est que de 3.1 dB . On constate cependant que la contribution cohérente présente bien un comportement intermittent, où se produisent des événements distincts, ceux les plus intenses étant espacés d'une durée d'environ $100 \Delta t$. Par contre la contribution incohérente fluctue sur des durées très courtes. Ces différents comportements se retrouvent quand on étudie les pentes spectrales. En effet, la contribution cohérente présente un comportement en $k^{-2.5}$, semblable à celui du signal total, à partir de $k=20$, qui correspond bien à une corrélation sur des durées de l'ordre de $100 \Delta t$. La contribution incohérente a pour sa part un spectre en k^0 jusqu'à $k=400$, et ensuite une décroissance en k^{-3} , ce qui correspond à une corrélation sur des durées inférieures à $5 \Delta t$. En ce qui concerne les PDFs, elles sont toutes asymétriques, bien que celle-ci soit nettement moins prononcée pour la contribution incohérente. L'analyse statistique des résultats montre que, malgré l'importance du bruit qui représente 48.6% de la variance totale, les événements cohérents extraits semblent significatifs, car la contribution incohérente que nous avons éliminée est corrélée sur des durées 20 fois plus courtes que la contribution cohérente.

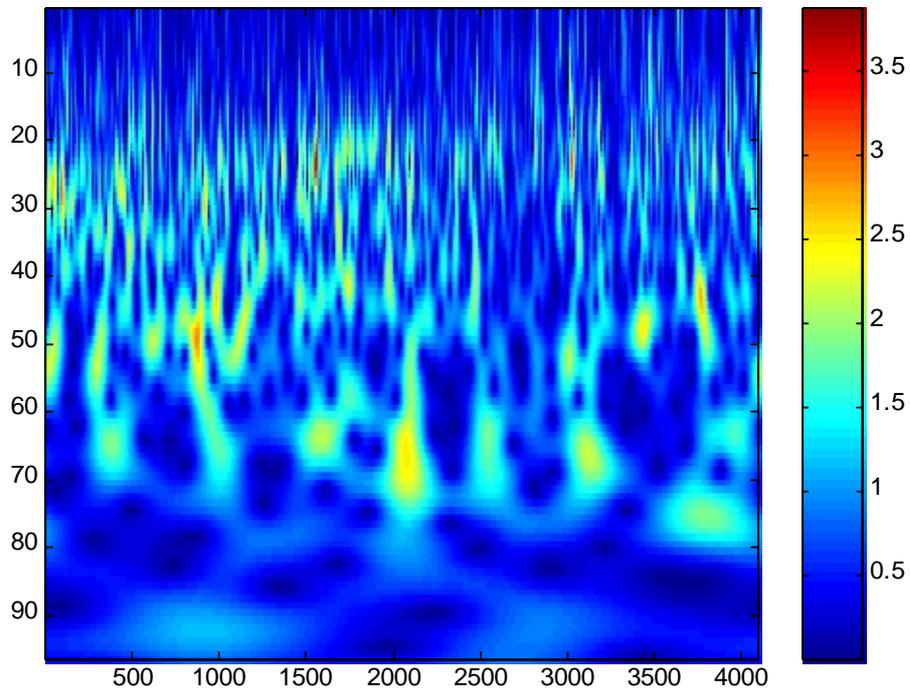
- **Signal de la quatrième sonde**

Le signal S4 est mesuré par la quatrième sonde et échantillonné sur $N=2^{12}=4096$ points :

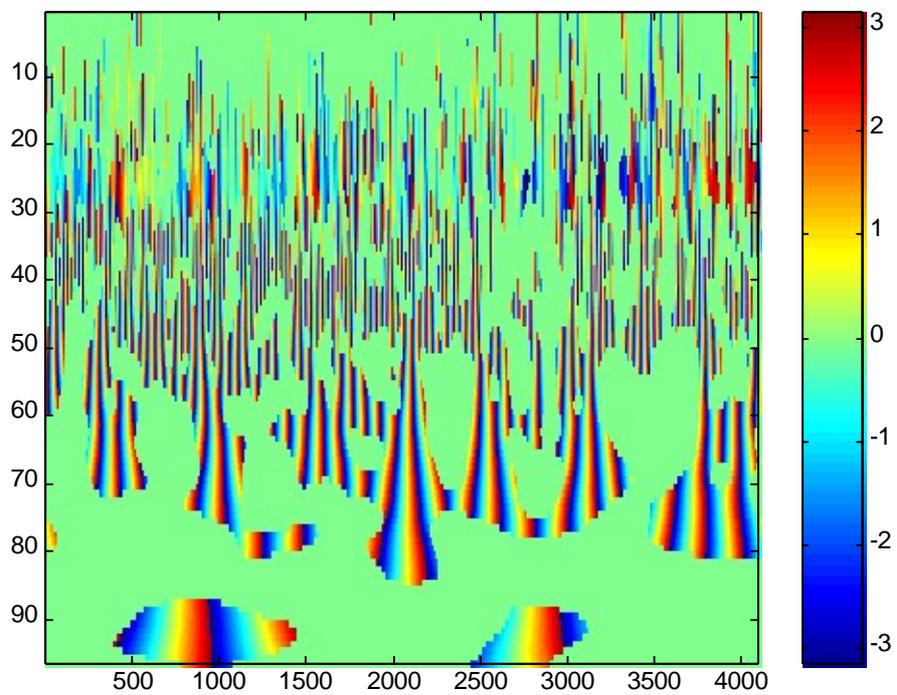


Signal S4 sur $N=2^{12}=4096$ points

La transformée en ondelettes continue du signal S4 est :



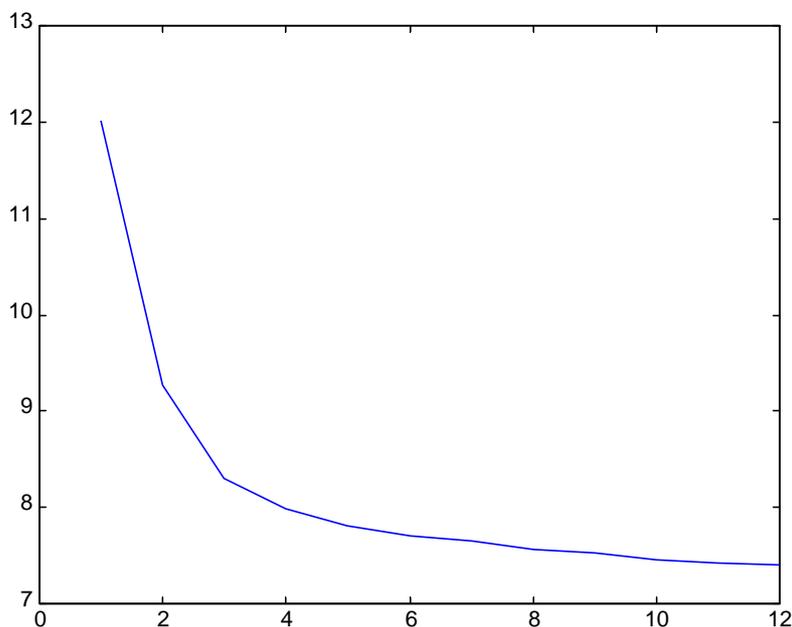
Module des coefficients d'ondelettes



Phase des coefficients d'ondelettes

Pour ce signal S4 le module des coefficients d'ondelettes ne montre pas un comportement ondulatoire, avec des lois de modulation de fréquence de type whistle, aussi clairement que ceux des signaux des trois autres sondes, mais ceci mériterait d'être confirmé en calculant les ridges des coefficients d'ondelettes. Par contre, à petite échelle l'énergie est organisée en structures verticales qui pointent sur des événements cohérents très fréquents, parmi lesquels les plus intenses se produisent autour des instants $t=500, 900, 2550, 2700, 3150, 3600$ et 3900 .

Nous appliquons l'algorithme itératif d'extraction des événements cohérents au signal S2. La valeur optimale du seuil, $T=7.4$, est atteinte après 12 itérations :

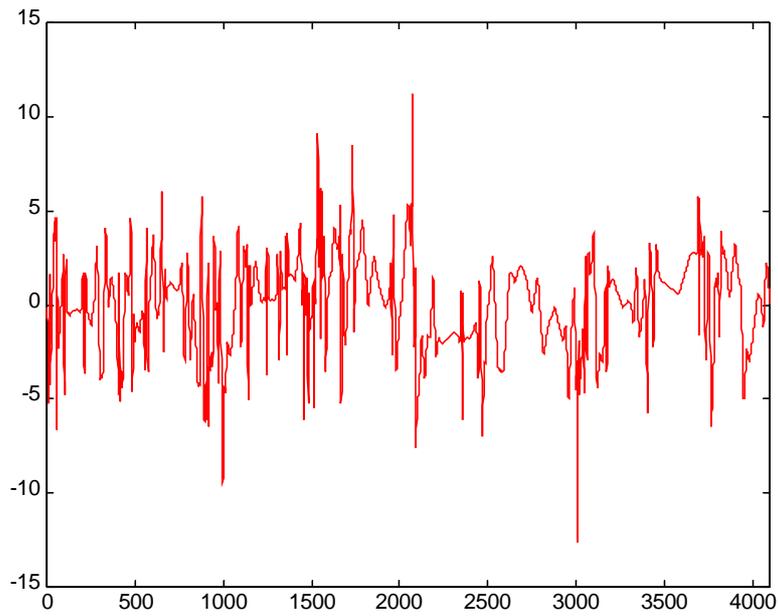


Valeurs du seuil en fonction de l'itération

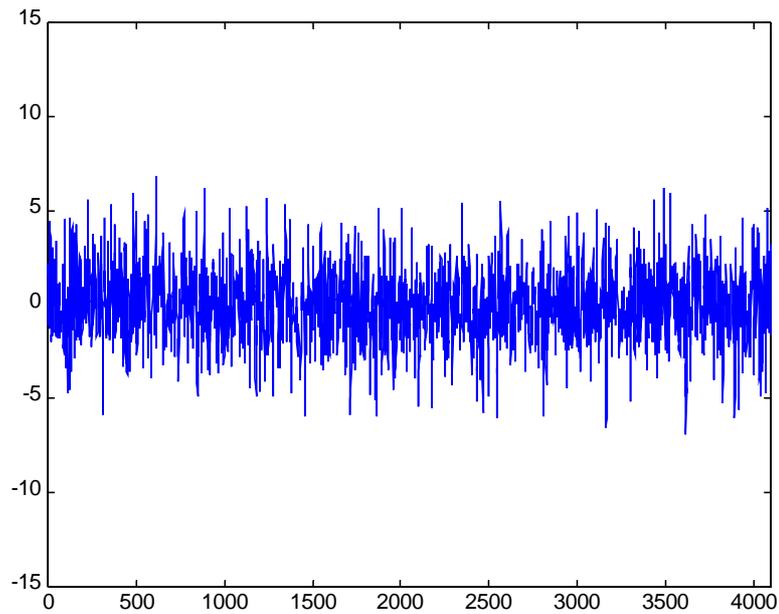
Les différents seuils itérés sont :

$T_0 = 12.007016$	$T_7 = 7.568013$
$T_1 = 9.278118$	$T_8 = 7.521188$
$T_2 = 8.303283$	$T_9 = 7.459370$
$T_3 = 7.977698$	$T_{10} = 7.428883$
$T_4 = 7.809302$	$T_{11} = 7.398618$
$T_5 = 7.710488$	$T_{12} = 7.398618$
$T_6 = 7.646986$	

Nous obtenons pour le signal S4 les contributions cohérente et incohérente :



Contribution cohérente



Contribution incohérente

Nombre de coefficients retenus : $N_{\text{coh}} = 133 = 3.2\% N$
 $N_{\text{inc}} = 3963 = 97.8\% N$

Les variances sont :

$$\sigma_{\text{tot}}^2 = 8.666 \quad \sigma_{\text{coh}}^2 = 5.376 \quad \sigma_{\text{inc}}^2 = 3.291$$

Le taux de compression de la variance est : 62.0%

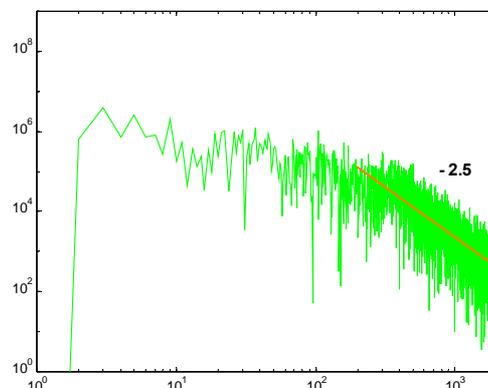
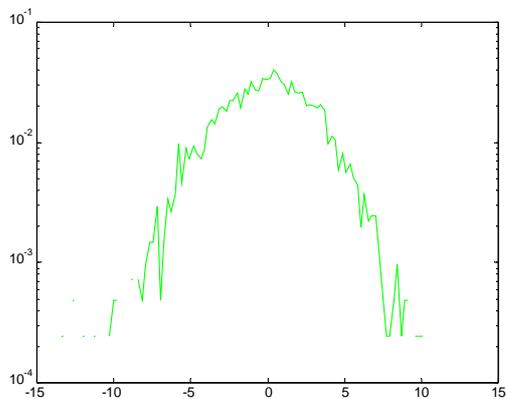
Le rapport signal sur bruit estimé est : 4.2 dB

L'analyse statistique des résultats nous donne :

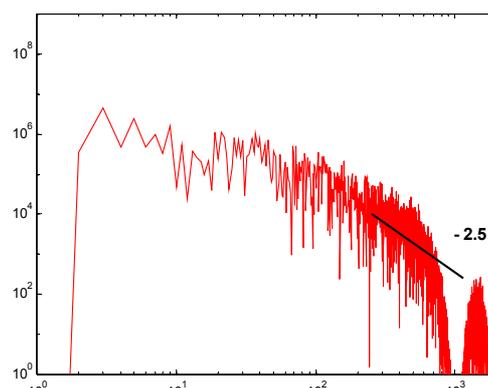
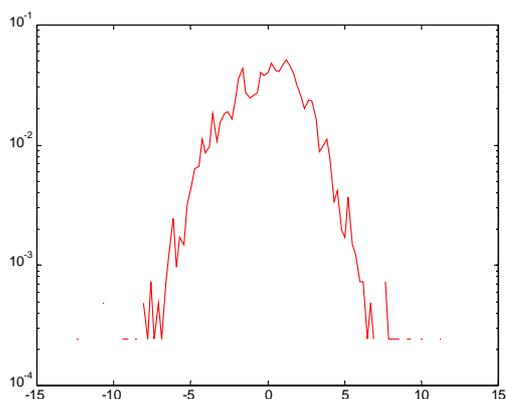
PDF

Spectre

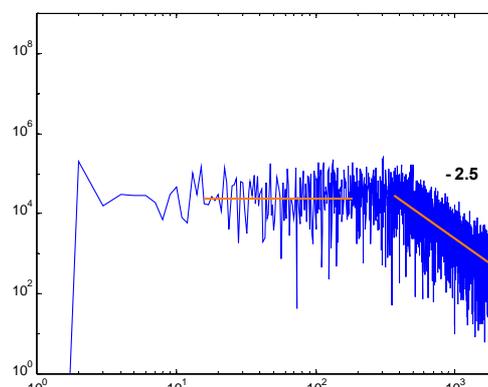
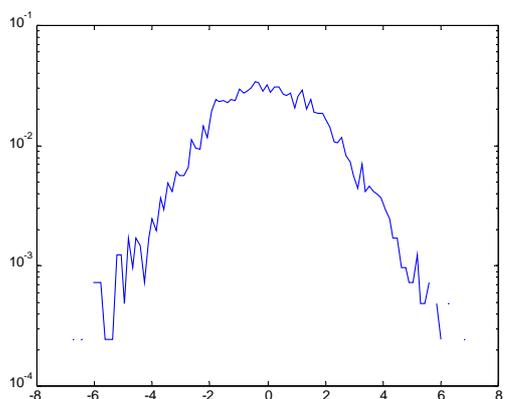
Signal S4 total



Contribution cohérente



Contribution incohérente



L'extraction des événements cohérents n'est pas très fiable pour le signal S4, car le rapport signal sur bruit estimé n'est que de 4.2 dB . On constate cependant que la contribution cohérente présente bien un comportement intermittent, où se produisent des événements distincts, les plus intenses ayant lieu à des instants voisins de $t = 1000, 1550, 1600, 2050$ et $3000 \Delta t$. Par contre la contribution incohérente fluctue sur des durées très courtes, mais présente également des pics espacés d'environ $7 \Delta t$, ce qui prouve son caractère également intermittent. En ce qui concerne les spectres, la contribution cohérente présente un comportement en $k^{-2.5}$, semblable à celui du signal total, à partir de $k=3$, qui correspond à une corrélation sur des durées de l'ordre de $700 \Delta t$. La contribution incohérente a pour sa part un spectre en k^0 jusqu'à $k=300$, et ensuite une décroissance en $k^{-2.5}$, ce qui correspond à une corrélation sur des durées inférieures à $7 \Delta t$. En ce qui concerne les PDFs, elles sont toutes symétriques, mais la contribution incohérente a une variabilité plus réduite. L'analyse statistique des résultats montre que, malgré l'importance du bruit qui représente 38% de la variance totale, les événements cohérents extraits semblent significatifs, car la contribution incohérente que nous avons éliminée est corrélée sur des durées 100 fois plus courtes que la contribution cohérente.

CONCLUSION

Nous avons présenté les méthodes d'analyse en ondelettes et d'extraction des événements cohérents que nous avons développées pour étudier les plasmas de bord. Nous avons illustré leur intérêt en les appliquant à divers signaux académiques. Nous avons en particulier montré que l'algorithme d'extraction des événements cohérents est fiable quand le rapport signal sur bruit est supérieur à 15 dB . Pour des rapports plus petits, leur estimation reste bonne et les événements les plus singuliers sont bien détectés, mais la structure précise du signal de départ n'est pas retrouvée. Nous avons ensuite appliqué ces méthodes à trois séries de signaux mesurant les fluctuations de densité des ions à l'aide de sondes de Langmuir placées en différents endroits sur le bord du plasma. Ces signaux ont été acquis sur différentes machines : le tokamak Tore-Supra de Cadarache, la machine torique Blaumann de Trondheim (Norvège) et le tokamak Castor de Prague (Tchéquie).

Nous avons d'abord traité un signal, échantillonné sur $N=2^{13}=8192$ points, provenant du tokamak Tore Supra. Sa transformée en ondelettes continue met en évidence un comportement intermittent dominé par des événements cohérents, caractérisés par une forte densité d'énergie organisée sur une grande gamme d'échelles mais apparaissant pendant des temps courts. On a montré en particulier que les deux fréquences dominantes dans le spectre d'énergie n'apparaissent pas de façon organisée quand on regarde la densité d'énergie en ondelettes, mais qu'elles résultent de la contribution à ces fréquences de plusieurs événements cohérents. Quand on applique l'algorithme d'extraction des événements cohérents, on trouve que la contribution cohérente, qui correspond à seulement 3.9% des modes, retient 70% de l'énergie totale. Sa PDF est asymétrique, comme celle du signal total, avec un comportement exponentiel, aussi bien pour les valeurs positives que pour celles négatives, et son spectre d'énergie présente le même comportement en k^{-2} que celui du signal total. En ce qui concerne la contribution incohérente, elle ne contient que 30% de l'énergie totale et son comportement est beaucoup moins intermittent que celui du signal total, avec une PDF quasi-Gaussienne et une décorrélation sur une gamme de fréquences allant de $k=1$ à $k=500$. Cependant, comme le rapport signal sur bruit estimé n'est que de 5.2 dB , nous ne pouvons pas dans ce cas garantir la qualité de l'extraction des événements cohérents.

Nous avons ensuite analysé une série de 650 signaux, chacun échantillonné sur $N=2^{10}=1024$ points, provenant de plusieurs sondes de Langmuir placées le long d'une section poloidale sur la machine torique Blaumann. Le module de sa transformée en ondelettes continue présente à grande échelle des structures horizontales qui dénotent un comportement plutôt ondulatoire, avec des glissements en fréquence de type whistle, tandis qu'à petite échelle l'énergie est organisée en structures verticales qui pointent sur plusieurs événements cohérents bien distincts. On trouve que la contribution cohérente, qui correspond à seulement 15% des modes, retient 99% de l'énergie totale ce qui montre que les événements cohérents dominent le signal. Le spectre de l'énergie cohérente présente le même comportement en k^{-3} que celui du signal total, tandis-que l'énergie incohérente est quasi équirépartie entre toutes les fréquences. Le rapport signal sur bruit estimé est de 21 dB, ce qui garantit dans ce cas la qualité de l'extraction des événements cohérents.

Pour finir nous avons analysé quatre signaux, chacun échantillonné sur $N=2^{12}=4096$ points, mesurés à partir de plusieurs sondes de Langmuir placées en quatre endroits différents d'une section poloidale du Tokamak Castor. Leurs variances sont très différentes les unes des autres, mais leur comportement spectral reste similaire, avec un spectre en k^0 sur une gamme de fréquences allant de $k=1$ à $k=100$ et entre $k^{-2.5}$ et $k^{-3.5}$ au-delà. Les PDFs des trois premiers signaux sont très asymétriques, contrairement à celle du dernier qui est quasi-Gaussienne. Bien que les variances et les PDFs soient différentes, on peut cependant tirer des conclusions valables pour les quatre signaux. Les modules de leurs transformées en ondelettes continue présentent tous à grande échelle des structures quasi-horizontales ou diagonales qui caractérisent un comportement plutôt ondulatoire avec des glissements en fréquence de type whistle, tandis qu'à petite échelle l'énergie est organisée en structures verticales qui pointent sur plusieurs événements cohérents distincts, mais beaucoup plus fréquents que ceux observés sur la machine Blaumann. Quand on applique l'algorithme d'extraction des événements cohérents, on trouve que les taux de compression obtenus varient entre 2.8% et 3.9% N pour les contributions cohérentes qui retiennent entre 51% et 65% de l'énergie totale. Dans tous les cas les spectres d'énergie cohérente sont similaires à ceux de l'énergie totale. En ce qui concerne les contributions incohérentes, elles contiennent entre 35% et 49% de l'énergie totale et leurs comportements sont beaucoup moins intermittents que ceux des signaux de départ, avec des PDFs quasi-Gaussienne et des spectres en k^0 sur une gamme de fréquences allant de $k=1$ à $k=400$. Les rapports signal sur bruit estimés varient entre 3.1 et 4.6 dB, ce qui ne permet pas de garantir la qualité de l'extraction des événements cohérents. Cependant, malgré l'importance du bruit, les événements cohérents extraits semblent significatifs. En effet, les contributions incohérentes que nous avons éliminées sont quasi-Gaussiennes et corrélées sur des durées beaucoup plus courtes (entre 20 et 100 fois) que les contributions cohérentes.

Nous allons maintenant effectuer des corrélations entre les contributions cohérentes que nous avons extraites à partir de signaux de sondes voisines et chercher ainsi à évaluer les vitesses de déplacement des structures cohérentes responsables des événements cohérents détectés. En particulier, nous nous attendons à ce que leurs vitesses soient différentes de celle de l'écoulement incohérent résiduel qui pourrait ainsi servir d'écoulement de référence. Si cela était confirmé, nous aurions une première évidence pour appuyer la thèse selon laquelle la turbulence dans les plasmas de bord produit des structures cohérentes qui se déplacent à des vitesses différentes les unes des autres et contribuent de façon majeure au transport de différentes quantités, en particulier la chaleur. Celles-ci seraient responsables de la diffusion anormale que l'on observe dans les plasmas de bord, tandis-que l'écoulement résiduel donnerait lieu à une diffusion turbulente classique de type mouvement Brownien.

Remerciements

Ce travail a été effectué en collaboration avec trois de nos étudiants, Michele Caldoro et Antonio Merulla, étudiants de 2^{ième} année à l'ENSTA, Paris, dans le cadre de leur stage de PPL, et Alexandre Azzalini, étudiant en troisième année de thèse de mécanique à l'Université Paris VI, Jussieu, Paris.

REFERENCES

- Ingrid Daubechies, 1992
Ten lectures on wavelets,
CBMS-NSF regional conferences series in applied mathematics,
vol. 61, SIAM
- Marie Farge, 1992
Wavelet transforms and their applications to turbulence,
Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 24, 395-457
- David Donoho and Ian Johnstone, 1992
Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage,
Biometrika, vol. 81, 425-457
- Barbara Burke, 1997
Ondes et ondelettes,
Belin
- Stéphane Mallat, 1998
A wavelet tour of signal processing,
Academic Press
- Marie Farge, Kai Schneider and Nicholas Kevlahan, 1999
Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis,
Phys. Fluids, vol. 11(8), 2187-2201
- Marie Farge, Giulio Pellegrino and Kai Schneider, 2001
Coherent vortex extraction in 3D turbulent flows using orthogonal wavelets,
Phys. Rev. Lett., vol. 87(5), 54011-45014
- Marie Farge and Kai Schneider, 2002
Analysing and computing turbulence using wavelets.
In new tools in turbulence. Les Houches 2000, (Eds. M. Lesieur, A. Yaglom and F. David), Springer, 449-503.