



CADARACHE

**Contrat CEA/EURATOM
Rapport final 2007 (7ème année)**

Généralisation de l'algorithme itératif en base d'ondelettes pour l'extraction des structures cohérentes dans des signaux de Tore Supra

Romain Nguyen van yen¹
sous la direction de
Marie Farge¹ et Kai Schneider²
et en collaboration avec
Pascale Monier-Garbet³ et Jamie Gunn³

¹ LMD-CNRS, École normale supérieure, Paris, France

² LMSNM-GP, CMI, Université de Provence, Marseille, France

³ CEA, Cadarache, France

Table des matières

1	Rappels sur les ondelettes et les processus aléatoires	6
1.1	Ondelettes	6
1.1.1	Transformée en ondelettes continue	6
1.1.2	Bases orthonormales et <i>frames</i> d'ondelettes	7
1.1.3	Analyse multirésolution	8
1.1.4	Transformée en ondelettes rapide de signaux discrets périodiques	10
1.1.4.1	<i>Frames</i> d'ondelettes complexes quasi-invariantes par translation	10
1.1.5	Cas bidimensionnel	11
1.2	Processus aléatoires	12
1.2.1	Temps de corrélation et puissance spectrale	13
1.2.2	Corrélations à portée infinie	13
1.2.3	Corrélations à portée finie	14
1.2.4	Champs Gaussiens bidimensionnels	15
1.2.5	Propriétés élémentaires en base d'ondelettes	15
1.2.6	Gaussianité, point aberrants	16
2	Débruitage de signaux 1D et d'images 2D : Principe et algorithmes	19
2.1	Débruitage en présence d'un bruit additif blanc Gaussien	19
2.1.1	Notations	19
2.1.2	Seuillage des coefficients d'ondelettes	20
2.1.3	Estimation de la variance	21
2.2	Débruitage en présence d'un bruit additif Gaussien corrélé	21
2.2.1	L'obstacle de la régularité	22
2.2.2	L'obstacle de l'estimation de la covariance	22
2.2.3	L'algorithme itératif échelle par échelle	23
2.2.4	Cas 2D et utilisation des ondelettes à valeurs complexes	24
2.2.5	Choix du paramètre c_α	24
2.3	Comparaison des algorithmes dans le cas de signaux académiques 1D et 2D	25
2.3.1	Bruit blanc 1D et 2D	25
2.3.2	Modèle paramétrique de bruit Gaussien fractionnaire	26
2.3.3	Bruits corrélés sans modèle paramétrique	26
2.3.4	Estimation de la puissance spectrale du bruit	26
3	Analyse en ondelettes continues de signaux 1D de Tore Supra (tir #35000)	29
3.1	Protocole expérimental	29
3.2	Propriétés des séries temporelles	29
3.2.1	Mesures de courant de saturation	29
3.2.2	Mesures de potentiel	30
3.3	Analyses en ondelettes continues	31
3.4	Estimation du flux de particules	33
3.5	Contenu de l'annexe 1	34

4	Extraction des structures cohérentes dans des signaux 1D de Tore Supra (tir #35000)	36
4.1	Du débruitage à l'extraction des structures cohérentes	36
4.1.1	Extraction dans les signaux de courant de saturation et de potentiel	36
4.1.2	Extraction dans le signal de flux	36
4.2	Comportement des algorithmes sur les signaux mesurés en l'absence de plasma	37
4.3	Algorithme standard	37
4.3.1	Gaussianité de la partie incohérente	37
4.3.2	Corrélations croisées entre mesures simultanées	38
4.3.3	Influence de la distance entre la sonde et la LCFS	39
4.3.4	Flux	40
4.4	Utilisation des ondelettes complexes de Kingsbury	40
4.5	Utilisation du seuillage échelle par échelle	41
4.6	Contenu de l'annexe 2	42
5	Extraction des structures cohérentes dans des champs turbulents 2D	47
5.1	Algorithme classique	47
5.2	Utilisation des ondelettes à valeurs complexes	47
5.3	Extraction échelle par échelle	48

1

¹N.B : les annexes à ce rapport peuvent être téléchargées sur le site FTP ftp.lmd.ens.fr, dans le répertoire /pub/users/rnguyen

Introduction

La turbulence pleinement développée est l'état chaotique extrême d'un écoulement fluide dont on ne peut prévoir l'évolution temporelle de façon stable. Celle-ci est complètement dominée par l'effet des instabilités hydrodynamiques, électromagnétiques ou cinétiques dues à la dynamique non-linéaire de l'écoulement. Bien que très désordonné, cet état est caractérisé par une organisation spontanée des fluctuations en structures cohérentes, localisées spatialement et persistantes dans le temps. On ne sait pas décrire analytiquement ces structures, mais on observe qu'elles concentrent l'énergie à toutes les échelles de l'écoulement, ce qui confère à la dynamique son caractère multi-échelles.

Le nombre d'échelles spatiales et temporelles nécessaires pour simuler numériquement l'évolution d'un écoulement turbulent a un coût important en termes de puissance de calcul. C'est une limitation sérieuse dans beaucoup de situations pratiques. On conjecture que l'évolution temporelle de l'écoulement pourrait être calculée seulement à partir des degrés de liberté minoritaires liés aux structures cohérentes. On souhaiterait donc extraire les structures cohérentes du reste de l'écoulement. Aucune hypothèses sur leur taille, leur forme ou leur distribution spatiale n'est largement acceptée par la communauté travaillant sur la turbulence. On a donc proposé de définir les structures cohérentes comme toutes les composantes d'un écoulement turbulent qui ne peuvent pas être modélisées par un bruit [7]. Ainsi, extraire les structures cohérentes se ramène à effectuer un débruitage du champ de vorticités décrivant l'écoulement turbulent. Pour cela, il est nécessaire de changer de représentation au moyen d'une transformation mathématique.

Il arrive fréquemment que les grandeurs physiques accessibles à la mesure expérimentale ne soient pas directement exploitables pour interpréter les phénomènes, auquel cas il peut être intéressant de leur faire subir une transformation mathématique qui révèle mieux l'information recherchée. Des transformations simples comme la dérivation ou l'intégration peuvent révéler certaines propriétés qui n'étaient pas apparentes sur le signal de départ. Plus généralement, on s'intéressera à des transformées de type intégral, qui font passer d'une fonction (de l'espace ou du temps) à l'ensemble de ses produits scalaires avec une famille de fonctions d'analyse. Les propriétés d'une transformation pour l'étude de signaux correspondant à un système physique donné sont toujours reliées aux propriétés mathématiques de l'équation décrivant le phénomène étudié. Ainsi, les travaux fondateurs de Fourier sur l'intégration de l'équation de la chaleur ont montré que les coefficients de Fourier du champ de température obéissaient à des équations plus simples que le champ de température lui-même.

Le choix des fonctions d'analyse doit être dicté par les modèles ou les connaissances *a priori* dont on dispose. L'introduction de la transformée en ondelettes continue par Alex Grossmann et Jean Morlet en 1984 s'inscrit dans cette perspective. Les fonctions d'analyse ne sont plus des sinusoides comme pour la transformée de Fourier, mais toutes les dilatations et translations possibles d'une ondelette mère, à la fois oscillante et très localisée (figure 1.1a). L'information révélée de cette manière ne concerne plus les fréquences ou les nombres d'ondes du signal mais les différentes échelles à chaque position ou à chaque instant, c'est pourquoi on parle de représentation multi-échelles. Cette représentation multi-échelle permet d'extraire les structures cohérentes des écoulements turbulents en appliquant une méthode inspirée par des résultats théoriques de traitement du signal.

Nous avons exploré deux pistes pour l'amélioration de la méthode d'extraction des structures cohérentes :

- l'introduction d'un nouvel outil mathématique, les *frames* ondelettes complexes quasi-invariantes par translation
- la prise en compte de corrélations dans le bruit

Après avoir précisé les notions mathématiques d'ondelettes et de processus aléatoires, ainsi que les

caractéristiques physiques des écoulements turbulents, nous nous placerons dans le contexte général du débruitage de signaux pour introduire deux nouveaux algorithmes. Nous validerons ensuite ces deux algorithmes sur des signaux académiques. Pour finir, nous les appliquerons à :

- une série de mesures expérimentales de l'équipe de Pascale Monier-Garbet et Jamie Gunn provenant du tokamak Tore Supra (CEA, Cadarache)
- un champ bidimensionnel calculé par simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes (Benjamin Kadosh et Kai Schneider, L3M, Marseille) que nous utiliserons pour démontrer la généralisation de la méthode aux images à deux dimensions, dans la perspective de traiter à terme les images provenant de la caméra rapide qui sera installée sur Tore Supra.

Chapitre 1

Rappels sur les ondelettes et les processus aléatoires

1.1 Ondelettes

1.1.1 Transformée en ondelettes continue

L'essentiel de cette brève introduction est tirée de [15], ainsi que les conventions de notation. Nous considérerons d'abord un signal dépendant d'un seul paramètre, par exemple le temps, modélisé comme un élément de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. On cherche à analyser ce signal avec une famille de fonctions engendrés par dilatation et translation d'une fonction de référence, l'ondelette mère ψ . Étant donné un paramètre d'échelle a réel strictement positif et un paramètre de position réel b , on définit donc

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

la transformée intégrale de f relativement à cette famille étant alors

$$\tilde{f}(a,b) = \langle f | \psi_{a,b} \rangle \quad (1.1)$$

Mais pour pouvoir dire que l'on a extrait toute l'information contenue dans f , on souhaite également pouvoir reconstruire f à partir de sa transformée \tilde{f} . Un résultat important, découvert par Grossmann et Morlet en 1984, est que cela est possible si et seulement si ψ vérifie la condition d'admissibilité

$$C_\psi = \int_0^\infty |\hat{\psi}|^2 \frac{dk}{k} < \infty \quad (1.2)$$

Si ψ est intégrable ($\psi \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$), (1.2) signifie simplement que ψ doit être de moyenne nulle. Or pour une fonction intégrable, la seule façon d'être de moyenne nulle est d'osciller, c'est pourquoi on appelle ψ "ondelette" (figure 1.1a). La formule de reconstruction est alors

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}(a,b) \psi_{a,b}(x) \frac{dadb}{a^2}$$

\tilde{f} s'appelle transformée en ondelettes continue de f par l'ondelette mère ψ . Chaque coefficient $\tilde{f}(a,b)$ apporte des informations sur le comportement de f au voisinage du point b et à l'échelle a . Cependant, la nature précise de ces informations dépend de l'ondelette mère choisie, dont le choix ne doit donc en aucun cas être arbitraire. Les trois propriétés les plus importantes sont :

- la rapidité de la décroissance de ψ , qui assure que chaque coefficient $\tilde{f}(a,b)$ apporte bien des informations sur le comportement de f au voisinage immédiat du point b
- la rapidité de la décroissance de $\hat{\psi}$, qui assure que chaque coefficient $\tilde{f}(a,b)$ apporte bien des informations sur le comportement de f au voisinage immédiat de l'échelle a . La décroissance à l'infini de $\hat{\psi}$ est reliée par une propriété bien connue de la transformée de Fourier à la régularité de l'ondelette ψ
- le nombre de moments nuls, c'est à dire le plus grand entier m tel que $\int_{-\infty}^\infty x^{m-1} \psi(x) dx = 0$.

La réalisation simultanée des deux premières propriétés est limitée par l'inégalité dite de Heisenberg, qui affirme que le produit des écarts types de ψ et $\hat{\psi}$ ne peut pas être inférieur à $\frac{1}{2}$. La troisième propriété assure que plus f est régulière au voisinage du point b , plus $\tilde{f}(a, b)$ tendra vite vers zéro. Pour préciser les choses, nous nous placerons dans le cadre de la régularité Lipschitzienne. On dit qu'une fonction f est uniformément Lipschitzienne d'ordre r sur $[x_1, x_2]$ si

$$\exists K > 0, \forall x \in [x_1, x_2], \exists P_x \in \mathbb{R}_n[x], \forall y \in \mathbb{R}, |f(y) - P_x(y)| \leq K|x - y|^r \quad (1.3)$$

où on a noté d la partie entière de r . On a alors le théorème suivant ([13] page 167) :

Si f est uniformément Lipschitzienne d'ordre $r \leq m$ sur $[x_1, x_2]$, alors il existe $A > 0$ tel que

$$\forall (a, b) \in [x_1, x_2] \times \mathbb{R}^+, |\tilde{f}(a, b)| \leq Aa^{r+\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

Intuitivement, cela signifie que les fonctions qui sont presque partout lisses auront presque partout des coefficients d'ondelettes proches de zéro aux échelles fines. Les grands coefficients d'ondelettes seront ainsi concentrés uniquement au voisinage des singularités. Nous verrons l'importance de ce fait lorsque nous aborderons les applications pratiques.

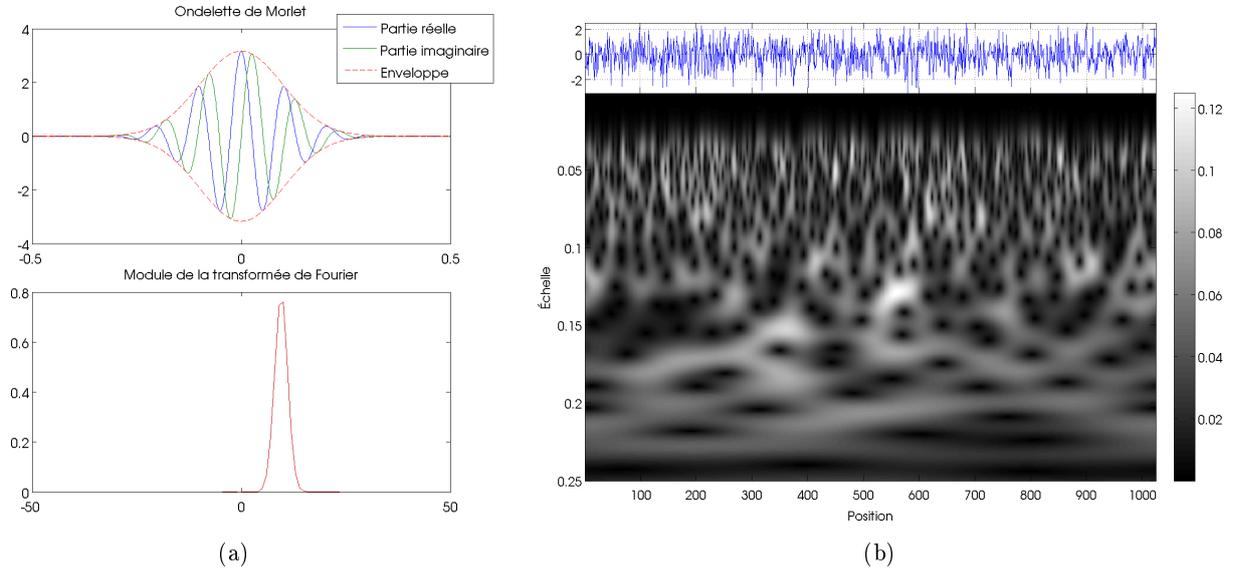


FIG. 1.1 – L'ondelette de Morlet (a) est bien localisée dans l'espace physique et dans l'espace de Fourier. Cependant, les modules des coefficients d'ondelettes d'un bruit blanc Gaussien (b) ne sont pas indépendants, du fait de la redondance de la transformée en ondelettes continues (paragraphe 1.1.2).

1.1.2 Bases orthonormales et *frames* d'ondelettes

L'information fournie par \tilde{f} est redondante, car les coefficients d'ondelettes voisins ne sont pas indépendants. On le voit bien sur la transformée d'un bruit blanc Gaussien (figure 1.1). Cette redondance de la transformée en ondelettes continue est un handicap pour les applications à la compression de signaux ou d'images, mais aussi pour tout type de manipulation qu'on souhaiterait faire subir aux coefficients. En effet, cela n'a pas de sens de modifier un des coefficients $\tilde{f}(a, b)$ indépendamment de ses voisins en espace et en échelle. La portée de l'interaction est donnée par le noyau reproduisant de l'ondelette choisie [6].

Une première étape pour réduire la redondance est de ne considérer qu'une sous-famille discrète des $\psi_{a,b}$, $(a, b) \in \Lambda$. On souhaite cependant que les coefficients restants caractérisent encore complètement la fonction f , il faut donc choisir soigneusement ceux que l'on garde. Éliminer complètement la redondance signifierait que les ondelettes choisies forment une base de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$, auquel cas on aurait pour toute f

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle \psi_\lambda | f \rangle \psi_\lambda \quad (1.5)$$

Intuitivement, on sent qu'il est difficile que deux fonctions $\psi_{a,b}$ et $\psi_{a',b'}$ pour (a',b') et (a,b) voisins soient deux à deux orthogonales, car leurs supports se recouvrent, de même que les supports de leurs transformées de Fourier. Une solution connue depuis 1901 est l'ondelette de Haar, échantillonnée sur la grille dyadique

$$(a,b) \in \Lambda = \{(2^{-j}, 2^{-j}k) \mid j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\} \quad (1.6)$$

pour laquelle on visualise facilement (figure 1.2) l'orthogonalité entre les échelles, mais qui n'est même pas continue et n'a qu'un seul moment nul. La construction de bases orthonormales d'ondelettes ayant plus de moments nuls est un problème difficile. Nous en verrons un exemple un peu plus loin. Pour certaines des applications que nous considérerons, il est cependant crucial de ne pas se limiter à la stricte orthogonalité. Cela permet en effet, au prix d'une légère redondance de la transformée, d'obtenir d'autres propriétés. Une condition introduite dans [4] est que l'énergie des coefficients d'ondelette soit, à une constante près, la même que celle de la fonction analysée :

$$\|f\|_2^2 = A \sum_{\lambda \in \Lambda} |\tilde{f}(\lambda)|^2$$

auquel cas on aura presque la même formule de reconstruction que pour une base orthonormale (1.5) :

$$f = \frac{1}{A} \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle \psi_\lambda \mid f \rangle \psi_\lambda \quad (1.7)$$

On dit que la famille $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ constitue une *tight frame* de $L^2(\mathbb{R})$. Nous donnerons un exemple de *tight frame* dans le paragraphe 1.1.4.1. Pour les *frames*, il n'est en principe pas nécessaire de se limiter à une grille dyadique, mais c'est pourtant le seul cas que nous aurons besoin de considérer. Notons que pour *frames* comme pour les bases orthonormales, le choix de la grille (1.6) implique la perte de l'invariance par translation propre à la transformée en ondelettes continue.

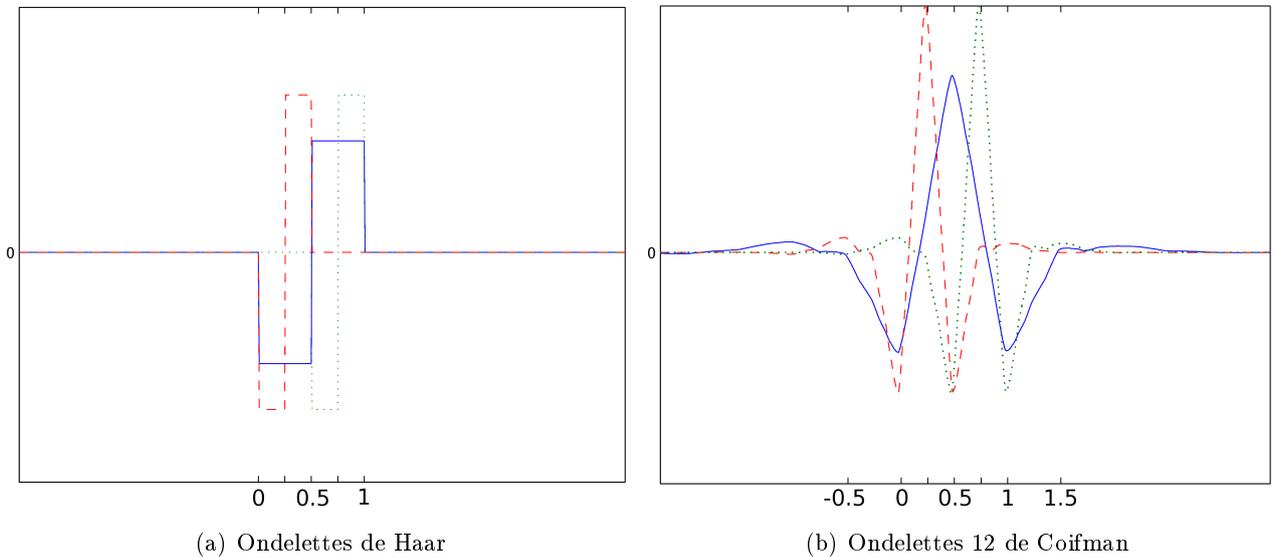


FIG. 1.2 – Pour la famille d'ondelettes la plus simple (a), dite de Haar, qui a été introduite bien avant la théorie des ondelettes elle-même, on voit aisément que l'ondelette contractée d'un facteur 2 (en tirets rouges) est orthogonale à l'ondelette initiale (en bleu). Il en est de même pour sa voisine sur la grille dyadique (en pointillés verts). L'ondelette 12 de Coifman (b) possède également ces propriétés, mais a en plus 4 moments nuls. Sa construction s'effectue dans le formalisme de l'analyse multirésolution (paragraphe 1.1.3).

1.1.3 Analyse multirésolution

Nous allons introduire très brièvement le formalisme de l'analyse multirésolution, proposé par Mallat en 1988 et qui a permis par la suite la construction des premières bases d'ondelettes orthonormales à

support compact par Daubechies. C'est aussi le cadre adapté pour établir l'algorithme de calcul rapide des coefficients d'ondelettes utilisé dans la pratique.

Nous noterons $\psi_{j,i}$ (resp. $\tilde{f}_{j,i}$) l'ondelette (resp. le coefficient) correspondant à $\lambda = (2^{-j}, 2^{-j}i)$ sur la grille dyadique. Par abus de langage, nous dirons que ce coefficient est à l'échelle j (au lieu de 2^{-j}). Soit maintenant J un entier fixé. Nous appellerons approximation de la fonction f à la résolution 2^J la somme partielle de ses coefficients d'ondelettes d'échelles $j < J$:

$$f_j = \sum_{j < J} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_{j,i} \psi_{j,i}$$

Ainsi, les coefficients d'ondelettes $\tilde{f}_{J,i}$ contiennent toute l'information nécessaire pour passer à une approximation de f à la résolution 2^{J+1} . Pour l'ondelette de Haar, remarquons que f_J est une approximation de f par une fonction constante sur chaque intervalle $[\frac{i}{2^J}, \frac{i+1}{2^J}]$. Dans le cas général, on montre qu'il existe une fonction ϕ , appelée fonction d'échelle, telle que

$$(x \rightarrow \phi_{J,i}(x) = 2^{-\frac{J}{2}} \phi(2^{-J}x - i) \mid i \in \mathbb{Z})$$

constitue une base orthonormée du sous-espace des approximations de toutes les fonctions de L^2 à la résolution 2^J . Pour l'ondelette de Haar, ϕ est simplement l'indicatrice de l'intervalle $[0, 1]$. Plus généralement, tout comme ψ , la fonction d'échelle ϕ est une fonction test pour l'analyse de f , mais

- les coefficients de fonctions d'échelle contiennent l'information aux échelles $j < J$. Ils seront notés $\bar{f}_{J,i}$.
- les coefficients d'ondelettes contiennent l'information nécessaire pour passer de la résolution J aux résolutions $2^{J+1}, 2^{J+2}, \dots$

On peut toujours reconstruire f à partir de ces deux familles de coefficients :

$$f = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{f}_{J,i} \phi_{J,i} + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_{j,i} \psi_{j,i} \quad (1.8)$$

où le premier terme n'est autre que l'approximation à l'échelle J , f_J , et le deuxième contient l'ensemble des détails supplémentaires nécessaires pour reconstruire entièrement f . Mallat a montré l'existence de filtres h et g indépendants de J tels que :

$$\begin{aligned} \phi_{J-1,i} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2i} \phi_{J,n} \\ \psi_{J-1,i} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2i} \phi_{J,n} \end{aligned}$$

où on a en fait $g_n = (-1)^n h_n$. Ces relations, combinées avec (1.8), permettent de calculer les coefficients d'ondelettes et de fonctions d'échelle de proche en proche :

$$\tilde{f}_{J-1,i} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{n-2i} \bar{f}_{J,n} \quad (1.9)$$

$$\bar{f}_{J-1,i} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2i} \tilde{f}_{J,n} \quad (1.10)$$

. En appliquant les relations (1.9-1.10) autant de fois que nécessaire, on peut donc calculer des approximations de f à des résolutions de plus en plus grossières, ainsi que tous les coefficients d'ondelettes qui contiennent l'information nécessaire pour revenir à la résolution de départ, d'où le nom d'analyse multirésolution. Remarquons que (1.9-1.10) sont en fait plus fondamentales qu'il n'y paraît, puisque c'est en explicitant les filtres g et h qu'on construit les bases d'ondelettes orthonormales. On cherche en général les filtres les plus courts satisfaisant un certain nombre de contraintes *a priori*. Sur la figure 1.2.b, on donne l'exemple de la Coifflet 12, qui est l'ondelette au support le plus court ayant 4 moments nuls, et telle que la fonction d'échelle associée a 3 moments nuls. C'est celle que nous utiliserons pour tous les exemples et applications que nous aborderons bientôt.

1.1.4 Transformée en ondelettes rapide de signaux discrets périodiques

Supposons qu'on dispose d'un échantillonnage de f à la résolution 2^J , issu par exemple d'une mesure physique :

$$f[k] = f\left(\frac{k}{2^J}\right), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.11)$$

En pratique, on dispose d'un échantillon fini N de valeurs de la fonction f , qu'on supposera régulièrement espacés comme dans (1.11). Sans perte de généralité, on peut se placer sur l'intervalle $[0, 1]$, ce qui revient à prendre $N = 2^J$. Sous certaines conditions, les coefficients de fonction d'échelle à cette résolution sont bien approximés par les valeurs de f aux points d'échantillonnage. Afin d'appliquer les relations (1.9-1.10) pour les points situés près des bords de l'intervalle $[0, 1]$, on aurait besoin de connaître les valeurs que prend f en dehors de cette intervalle. Nous adopterons la solution la plus simple pour contourner cet écueil, qui est de prolonger f en une fonction 1-périodique sur \mathbb{R} , comme on le fait couramment pour calculer la transformée de Fourier discrète. Dans le cas des ondelettes, il existe une façon plus élégante de procéder, mais nous la laisseront de côté.

Partant de N coefficients de fonctions d'échelle à l'échelle J , on calcule $\frac{N}{2}$ coefficients d'ondelettes à l'échelle $J - 1$ par convolution avec h . Si le filtre h a pour longueur K , on a donc effectué $\frac{N}{2} \times K$ opérations. Après $\frac{N}{2} \times K$ opérations supplémentaires, on a calculé les coefficients de fonctions d'échelle à l'échelle $J - 1$. On procède récursivement jusqu'à l'échelle maximale souhaitée, que l'on notera toujours L . Le nombre d'opérations est divisé par deux à chaque fois qu'on passe à une échelle plus grossière, donc au total on aura effectué $K \times (2^{J-1} + 2^{J-2} + \dots + 2^L)$ opérations élémentaires. La complexité de l'algorithme est donc majorée par $K \times 2^J$. C'est à comparer avec la transformée de Fourier rapide, qui dans une situation équivalente atteint une complexité en $O(J \times 2^J)$.

Pour reconstruire le signal discret à partir de ses coefficients d'ondelettes, il est nécessaire d'inverser le système linéaire (1.9-1.10) à chaque échelle, les inconnues étant maintenant les $\bar{f}_{J,i}$. Grâce aux propriétés des ondelettes orthonormales, on montre que $\bar{f}_{J,k}$ s'obtient par une somme de convolutions de $\bar{f}_{J-1,i}$ et $\bar{f}_{J-1,i}$ avec des filtres indépendants de J , ce qui fournit un algorithme d'inversion exact de la transformée en ondelettes orthonormales rigoureusement symétrique de l'algorithme d'analyse, et de complexité équivalente.

1.1.4.1 Frames d'ondelettes complexes quasi-invariantes par translation

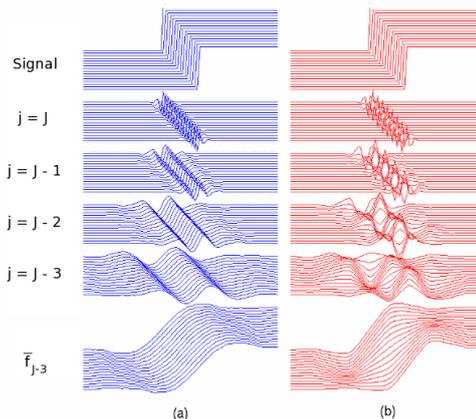


FIG. 1.3 – Comparons les reconstructions de 16 créneaux superposables à partir de leurs coefficients d'ondelettes à différentes échelles, suivant qu'on considère une base orthonormale d'ondelettes à valeurs réelles (b) comme au paragraphe 1.1.3, ou une frame d'ondelettes complexes quasi-invariantes par translation (a), comme au paragraphe 1.1.4.1. Suivant le décalage entre les signaux de départ, les reconstructions de (b) présentent des oscillations différentes tandis que celles de (a) sont simplement translatées.

Comme nous l'avons déjà souligné, l'échantillonnage sur une grille dyadique, s'il permet d'éliminer la redondance, entraîne aussi la perte de l'invariance par translation. Or cela pose des problèmes pour

les applications au traitement du signal (ou à la restauration d'images pour le cas bidimensionnel que nous verrons plus loin). Considérons en effet un ensemble de signaux strictement superposables mais décalés dans le temps (figure 1.3.b). L'agencement des points de grille imposé artificiellement par l'élimination de la redondance entraîne une répartition très différente de l'information entre les échelles. Ainsi, la transformée en ondelettes orthonormales perd la trace du fait que pour la plupart des applications pratiques, deux signaux superposables portent la même signification.

Kingsbury a construit à partir de 1998 des familles d'ondelettes à valeurs complexes [11, 12], qui ne sont pas des bases orthonormales mais seulement des *tight frames* de $L^2(\mathbb{R})$. Au prix d'un facteur 2 de redondance (c'est à dire que la transformée d'un signal échantillonné en N points comporte $2N$ coefficients), ces familles permettent de maintenir l'invariance par translation avec une très bonne approximation (figure 1.3.a). L'idée est de mettre en commun l'information fournie par deux bases orthogonales d'ondelettes, construites de façon à ce que la dépendance en translation de l'une compense presque exactement celle de l'autre. Pour des raisons que nous ne détaillerons pas, les coefficients d'un signal relativement à l'une et l'autre base se comprennent alors comme les parties réelle et imaginaire de coefficients complexes échantillonnés sur la grille dyadique.

L'intérêt de cette construction est de pouvoir utiliser tous les résultats connus sur les ondelettes orthonormales, en particulier l'algorithme rapide, pour calculer indépendamment la partie réelle et la partie imaginaire de chaque coefficient. C'est seulement au moment de l'analyse des coefficients qu'on se place dans la *frame* d'ondelettes complexes afin de retrouver la propriété d'invariance par translation. Ainsi, le coût en temps de calcul est multiplié par deux par rapport à une transformée réelle. Il en est de même pour l'espace mémoire occupé par les coefficients. Pour chaque application il s'agit de déterminer si l'invariance par translation justifie ce coût additionnel.

1.1.5 Cas bidimensionnel

Pour appliquer une transformée en ondelettes orthogonales à une fonction scalaire de plusieurs variables, on procède successivement sur chaque variable de façon séparable. Partant par exemple d'un champ scalaire bidimensionnel $v(x, y)$ observé à la résolution 2^J , on calcule tout d'abord ses coefficients d'ondelettes et de fonctions d'échelle relativement à la variable x à l'échelle $J-1$ par les relations (1.9-1.10). Les coefficients obtenus sont maintenant des fonctions de y , qui eux sont toujours à la résolution initiale 2^J :

$$\tilde{v}_{J-1, i_x}(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{i_x - 2n} \bar{v}_J(x, y) \quad (1.12)$$

$$\bar{v}_{J-1, i_x}(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{i_x - 2n} \bar{v}_J(x, y) \quad (1.13)$$

et on a la décomposition :

$$\bar{v}_J(x, y) = \sum_{i_x \in \mathbb{Z}} \bar{v}_{J-1, i_x}(y) \phi_{J-1, i_x}(x) + \sum_{i_x \in \mathbb{Z}} \tilde{v}_{J-1, i_x}(y) \psi_{J-1, i_x}(x)$$

on applique ensuite (1.9-1.10) d'une part à $\tilde{v}_{J-1, i}(y)$, d'autre part à $\bar{v}_{J-1, i}(y)$, ce qui fait que chacun des termes ci-dessus se dédouble à nouveau. On obtient la décomposition :

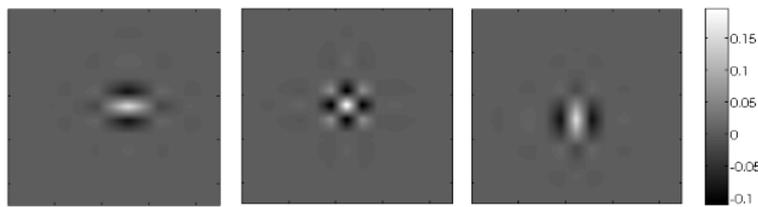
$$\begin{aligned} \bar{v}_J(x, y) = & \sum_{(i_x, i_y) \in \mathbb{Z}^2} \bar{v}_{J-1, i_x, i_y} \phi_{J-1, i_x}(x) \phi_{J-1, i_y}(y) + \sum_{(i_x, i_y) \in \mathbb{Z}^2} \tilde{v}_{J-1, i_x, i_y}^2 \phi_{J-1, i_x}(x) \psi_{J-1, i_y}(y) \\ & + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{v}_{J-1, i_x, i_y}^1 \phi_{J-1, i_x}(x) \psi_{J-1, i_y}(y) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{v}_{J-1, i_x, i_y}^3 \psi_{J-1, i_x}(x) \psi_{J-1, i_y}(y) \end{aligned}$$

où on a introduit un exposant $\epsilon = 1, 2, 3$ pour distinguer trois types de coefficients d'ondelettes. Le premier terme contient l'information à la résolution 2^{J-1} , tandis que les trois autres contiennent les détails nécessaires pour revenir de la résolution 2^{J-1} à la résolution initiale 2^J . On voit qu'il y a trois type de détails possibles : ceux qui ne concernent que la direction x , ceux qui ne concernent que la direction y , et ceux qui concernent les deux directions. La base orthonormale d'ondelettes obtenue sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ par ce procédé comporte donc les dilatées et translatées sur une grille dyadique, comprenant un paramètre d'échelle et deux paramètres de position $(2^{-j}, 2^{-j}i_x, 2^{-j}i_y)$, de trois ondelettes qui se distinguent par la direction dans laquelle elles oscillent :

$$\begin{aligned}
\psi^1(x, y) &= \psi(x)\phi(y) && \text{oscille dans la direction } x \\
\psi^2(x, y) &= \phi(x)\psi(y) && \text{oscille dans la direction } y \\
\psi^3(x, y) &= \psi(x)\psi(y) && \text{oscille dans les deux directions}
\end{aligned}$$

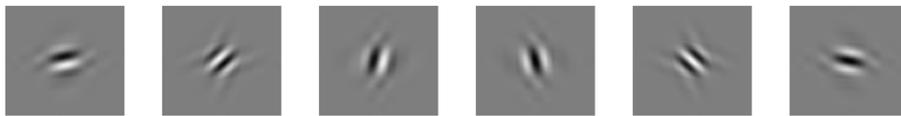
La construction est un peu plus compliquée pour obtenir une *frame* d'ondelettes bidimensionnelles à valeurs complexes quasi-invariante par translation, et nous ne la détaillerons pas ici. On obtient alors les dilatées et translatées sur la grille dyadique de 6 ondelettes mères à valeurs complexes, oscillant respectivement dans les directions $15^\circ, 45^\circ, 75^\circ, -15^\circ, -45^\circ, -75^\circ$ par rapport à l'axe x . De plus, les coefficients de la décomposition de $v(x, y)$ suivant cette *frame* sont eux aussi complexes. On a donc l'équivalent de 12 coefficients réels pour chaque emplacement sur la grille dyadique. En comparant avec le cas des ondelettes réelles, on constate que la propriété de quasi-invariance par translation est obtenue au prix d'une redondance d'un facteur 4. Notons que la présence de 6 ondelettes mères d'orientations différentes rend les ondelettes complexes 2D mieux adaptées aux signaux présentant des structures inclinées que les ondelettes réelles qui privilégient les axes vertical et horizontal.

Ondelettes à valeurs réelles



Ondelettes à valeurs complexes

Partie réelle



Partie imaginaire

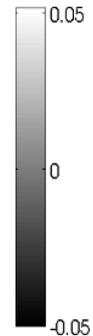


FIG. 1.4 – Les ondelettes mères que nous utiliserons pour la décomposition d'un champ scalaire de deux variables. L'ensemble des dilatées et des translatées sur la grille dyadique des trois ondelettes réelles est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Dans le cas des 6 ondelettes complexes, il ne s'agit d'une *frame*.

1.2 Processus aléatoires

Pour modéliser tout ou partie d'une mesure physique comme "aléatoire", il est crucial de définir précisément ce qu'on entend par "aléatoire". C'est ce que nous allons faire dans cette partie, en nous appuyant sur la théorie des processus Gaussiens. Un processus Gaussien stationnaire de moyenne nulle sur \mathbb{R} présente en effet l'avantage d'être entièrement défini par sa fonction de covariance :

$$c(\tau) = \langle X(t)X(t + \tau) \rangle$$

où $\langle . \rangle$ désigne l'opération de moyenne d'ensemble (ou espérance mathématique). De plus, toute transformation linéaire d'un processus Gaussien reste un processus Gaussien.

Nous introduirons successivement un modèle de corrélations à longue portée et un modèle de corrélations à courte portée. Nous donnerons ensuite la généralisation de ces modèles à un champ Gaussien sur \mathbb{R}^2 . Pour finir, nous introduirons la notion de point aberrant par rapport à une distribution Gaussienne.

1.2.1 Temps de corrélation et puissance spectrale

On appelle temps de corrélation du processus l'intégrale

$$\tau_C = \frac{1}{c(0)} \int_0^\infty c(\tau) d\tau \quad (1.14)$$

Dans beaucoup de cas, on peut s'attendre à ce que la fonction $c(\tau)$ tende rapidement vers 0 à l'infini, c'est à dire que deux valeurs du processus en des points très éloignés sont quasiment indépendantes. Si le temps de corrélation τ_C est fini (c'est-à-dire, en pratique, beaucoup plus court que la durée de l'expérience), on parle de corrélation à courte portée. On va s'intéresser à présent au cas $\tau_C = \infty$, représentatif de la situation où il y a des corrélations d'un bout à l'autre du temps d'observation. Sur le plan mathématique, cela signifie qu'on ne peut pas considérer deux valeurs de X , même en des points très éloignés, comme des variables aléatoires indépendantes. On alors parle de processus à longue mémoire. Cela se produit en particulier lorsque :

$$c(\tau) \asymp \tau^{-\gamma} \quad (\gamma < 1) \quad (1.15)$$

Expérimentalement, on n'a jamais accès à la limite $\tau \rightarrow \infty$, mais on a souvent observé la loi d'échelle (1.15) lorsque τ devient de l'ordre de la durée de l'expérience (ou de la taille du système dans le cas d'une variable spatiale). C'est le cas en particulier des incréments des cours de certains actifs boursiers, mais la première description détaillée en a été faite par Hurst dans le cadre d'une étude hydrologique sur les niveaux d'eaux de certains barrages.

On appelle puissance spectrale du processus stationnaire X la transformée de Fourier $\hat{c}(\nu)$ de $c(\tau)$. Si on regarde à quoi correspond (1.15) en termes de puissance spectrale, on trouve une loi de puissance du type :

$$\hat{c}(\nu) \asymp \nu^{-\alpha} \quad (1.16)$$

(où $\alpha = 1 - \gamma$). On a donc cherché à construire des processus vérifiant exactement (1.16) sur toute gamme spectrale, sous le nom générique de "processus en $\frac{1}{f}$ " (où f désigne ici la fréquence, que nous avons choisi de noter ν). Ce sont donc des versions idéalisées de processus à longue mémoire, dont nous allons brièvement rappeler la définition.

1.2.2 Corrélations à portée infinie

Revenons d'abord au mouvement Brownien standard. Comme il n'est pas stationnaire, on ne peut pas définir directement la puissance spectrale comme transformée de Fourier de $c(\tau)$. En revanche on peut fixer un intervalle $[0, t_{max}]$, et calculer la puissance spectrale moyenne des réalisations limitées à cet intervalle. Elle vérifie alors (1.16) avec $\alpha = 2$. On sait simuler facilement des réalisations indépendantes d'un mouvement Brownien standard. Pour cela, il suffit de générer ses incréments, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires Gaussiennes indépendantes (par exemple par la méthode classique de Box-Müller). Il est donc naturel de partir de là pour construire d'autres processus à longue mémoire. Mathématiquement, la première construction explicite revient à Mandelbrot et van Ness en 1968 [14] qui ont introduit les mouvements Browniens fractionnaires (FBM). Ils sont caractérisés par les trois propriétés suivantes :

- $B_H(t)$ est un processus Gaussien sur \mathbb{R}
- les incréments du processus sont stationnaires et auto-similaires : $\forall a, t, \tau, B_H(t + a\tau) - B_H(t) \stackrel{\Delta}{=} a^H (B_H(t + \tau) - B_H(t))$ pour un certain $H \in]0, 1[$
- le processus est continu en moyenne quadratique

Le cas $H = \frac{1}{2}$ correspond au mouvement Brownien standard. Le terme "fractionnaire" fait référence à la méthode de construction mathématique de B_H au moyen d'une dérivée fractionnaire. Le paramètre H contrôle la régularité des trajectoires (au sens de Lipschitz, cf (1.3)), comme on peut le voir sur

les exemples de la figure 1.5. Comme modèle de processus Gaussiens stationnaires à longue mémoire, nous prendrons les incréments de mouvements Browniens fractionnaires, qu'on appelle bruits Gaussiens fractionnaires.

$$X_H[n] = B_H(n+1) - B_H(n) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.17)$$

La fonction de covariance de X_H est donnée par :

$$c[n] = \mathbb{E}(X_H[0]X_H[n]) = \frac{\sigma^2}{2}(|n+1|^{2H} + |n-1|^{2H} - 2|n|^{2H}) \quad (1.18)$$

Elle vérifie en particulier (1.15) pour $\gamma = 2 - 2H$. Sa puissance spectrale vérifie (1.16) avec $\alpha = 2H - 1$, sur une large bande de fréquence. On voit que la fonction de covariance est toujours négative pour $0 < H < \frac{1}{2}$ (anticorrélation), et toujours positive pour $\frac{1}{2} < H < 1$ (corrélation). Pour $H = \frac{1}{2}$, on retrouve le cas du bruit blanc Gaussien ($c[n] = 0$ sauf pour $n = 0$). Trois exemples sont tracés sur la figure 1.5. Pour les simulations numériques, on a utilisé la méthode de la matrice circulante introduite dans [3], qui ne sera pas détaillée ici.

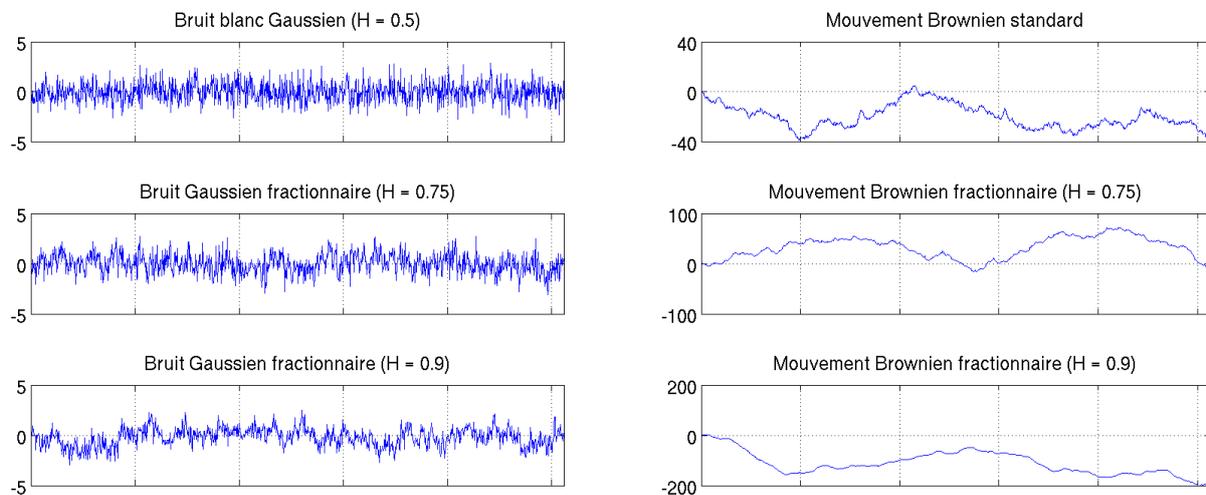


FIG. 1.5 – Exemples de trajectoires de bruits Gaussiens fractionnaires (colonne de gauche), et des mouvements Browniens fractionnaires dont ils sont les incréments (colonnes de droite). On a utilisé trois valeurs différentes de l'exposant de Hurst, H . La résolution est fixée à $N = 1024$.

Il existe d'autres façons de modéliser les processus corrélés à longue portée, que nous n'aborderons pas ici. En particulier, certaines méthodes utilisent les ondelettes. On peut également partir directement du modèle discret (1.18) et ajouter des complications, par exemple en mélangeant deux fonctions de corrélations avec des exposants H_1 et H_2 différents. L'avantage essentiel des mouvements Browniens est la rigueur et la simplicité de leur construction mathématique.

1.2.3 Corrélations à portée finie

Pour modéliser un processus aléatoire présentant des corrélations à courte portée, nous supposons que sa fonction de covariance décroît exponentiellement :

$$\mathbb{E}(X(t)(X(t+n))) = c[n] = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|n|}{\tau_C}\right) \quad (1.19)$$

C'est en effet une façon naturelle d'introduire un temps de corrélation fini τ_C . De plus, ce type de fonctions de corrélation intervient pour de nombreux systèmes physiques que nous ne détaillerons pas ici. Afin de simuler numériquement un bruit de ce type, on utilise un schéma intégral décrit dans [8]. Quelques exemples de trajectoires sont tracés sur la figure 1.6.

À partir de (1.19), on calcule la puissance spectrale de $X(t)$ dont on aura besoin par la suite :

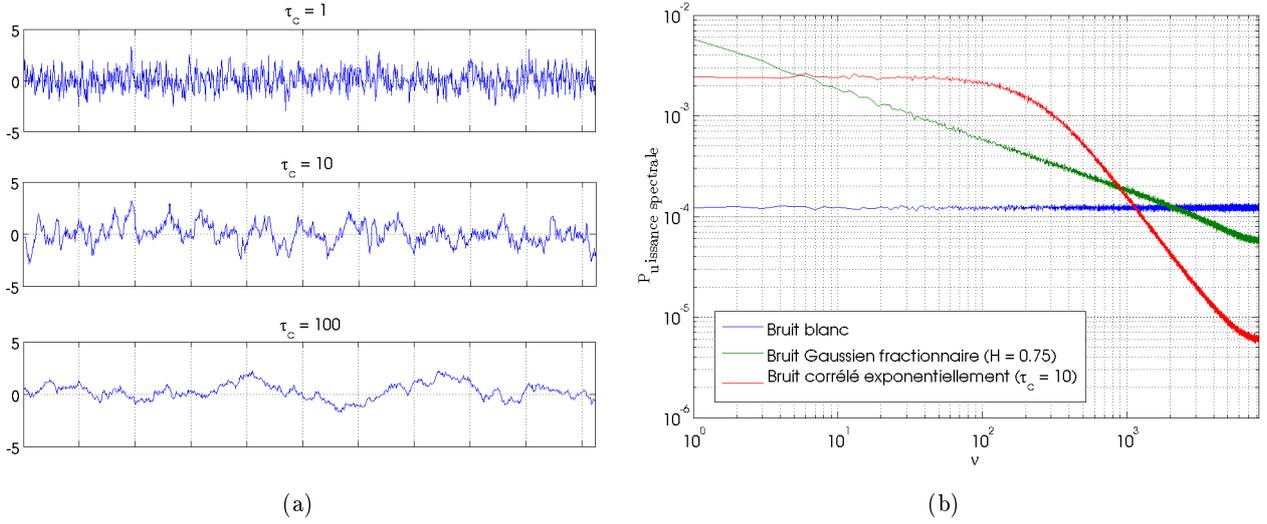


FIG. 1.6 – (a) Exemples de trajectoires pour des bruits Gaussiens dont la fonction de covariance décroît exponentiellement. (b) Spectres moyens pour 1000 réalisations de trois types de bruits de variances identiques, échantillonnés sur $N = 2^{14}$ points.

$$\hat{c}(\nu) = \frac{4\tau_C\sigma^2}{((1 + (\nu\tau_C)^2)} \quad (1.20)$$

Remarquons que pour $\nu \gg \tau_C^{-1}$, $\hat{c}(\nu) \propto \nu^{-2}$.

1.2.4 Champs Gaussiens bidimensionnels

Pour un processus Gaussien stationnaire sur \mathbb{R}^2 , on définit comme précédemment la fonction de covariance :

$$c(\tau_1, \tau_2) = \langle X(t_1, t_2)X(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2) \rangle$$

La puissance spectrale est alors sa transformée de Fourier $\hat{c}(\nu_1, \nu_2)$. Nous considérerons des processus isotropes, pour lesquels $\hat{c}(\nu_1, \nu_2)$ ne dépend que de $k = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$. La puissance spectrale est donc entièrement caractérisée par son intégrale sur les cercles centrés en 0 :

$$\hat{c}(k) \equiv \int_0^{2\pi} k d\theta \hat{c}(\nu_1, \nu_2) = 2\pi k \hat{c}(\nu_1, \nu_2) \quad (1.21)$$

On envisagera trois modèles de champs Gaussiens (figure 1.7) construits par analogie avec les cas unidimensionnels :

- non corrélés, c'est-à-dire des bruits blancs 2D. Dans ce cas, $c(\tau_1, \tau_2) = 0$ sauf pour $\tau_1 = \tau_2 = 0$, et donc $\hat{c}(k) \propto k$
- corrélés à portée infinie, avec un spectre en loi de puissance, c'est-à-dire $\hat{c}(k) \propto k^\alpha$, où $0 < \alpha < 1$. Dans tous nos exemples nous prendrons $\alpha = 0.25$
- corrélés à portée finie r_C , avec un spectre équivalent à (1.20) :

$$\hat{c}(k) \propto \frac{r_C k}{1 + (r_C k)^2} \quad (1.22)$$

où nous avons pris $r_C = 10$ pour tous nos exemples.

1.2.5 Propriétés élémentaires en base d'ondelettes

On admettra que les coefficients d'ondelettes de tous les processus aléatoires introduits jusqu'ici vérifient les propriétés suivantes [1] :

- ils sont presque deux à deux décorrés. On ne tiendra jamais compte des corrélations résiduelles

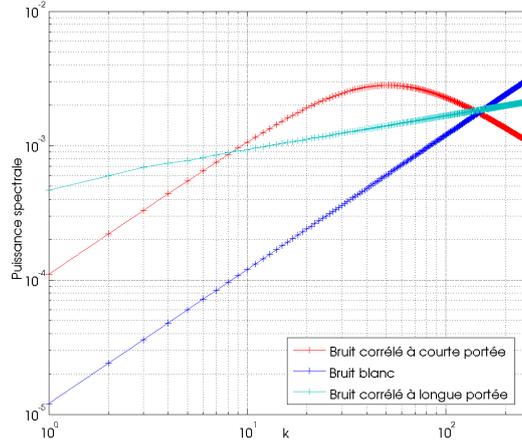


FIG. 1.7 – Spectres isotropes des champs Gaussiens 2D que l’on considérera, calculés à une résolution 512×512 . Les trois processus considérés ont la même énergie totale. Pour le bruit corrélé à longue portée, $\alpha = 0.25$. Pour le bruit corrélé à courte portée, $r_C = 10$ (cf. 1.2.4).

- leur variance ne dépend presque pas de la position, mais seulement de l’échelle. Cette propriété est liée à la stationnarité des processus. Le “presque” est lié à des effets de bords que nous négligerons.

On montre que si \hat{c} a un comportement en loi de puissance alors la variance à chaque échelle, notée σ_j^2 , vue comme une fonction de 2^j , suit le même comportement :

$$\hat{c}(\nu = 2^j) \asymp \sigma_j^2 \quad (1.23)$$

Ainsi pour les bruits Gaussiens fractionnaires, on a :

$$\sigma_j^2 \propto 2^{-j(1-2H)}$$

ce qui est équivalent à la relation suivante :

$$2H - 1 = \log_2(\sigma_{j-1}^2) - \log_2(\sigma_j^2) \quad (1.24)$$

Pour les processus à corrélation exponentielle, la décroissance de σ_j^2 est plus rapide mais ne se produit qu’aux échelles suffisamment fines, où on a :

$$\sigma_j^2 \asymp 2^{-2j}$$

En 2D, il est nécessaire de distinguer entre les variances du processus dans les trois directions $\epsilon = 1, 2, 3$ pour les ondelettes réelles, et dans les 6 directions pour les ondelettes complexes, que nous noterons $\sigma_{j,\epsilon}^2$ dans les deux cas. On montre qu’indépendamment dans chaque direction, on a un comportement asymptotique similaire au cas 1D (1.23) :

$$\hat{c}(k = 2^j) \asymp 2^j \sigma_{j,\epsilon}^2 \quad (1.25)$$

1.2.6 Gaussianité, point aberrants

Nous aurons besoin de décider si la valeur du signal en un point a une probabilité suffisante d’être une réalisation d’une variable aléatoire Gaussienne. Dans le cas contraire, nous souhaitons pouvoir affirmer qu’elle appartient au signal cohérent. Pour cela, nous introduisons la région des points α -aberrants par rapport à une loi Gaussienne de variance σ^2

$$\Omega_\alpha(\sigma^2) = \{x \mid |x| > c_\alpha \sigma^2\} \quad (1.26)$$

où le nombre c_α , qu’on appelle le quantile de niveau $1 - \alpha$, est tel que si X est effectivement Gaussienne de variance σ^2 , on ait

$$\mathbb{P}(X \in \Omega_\alpha(\sigma^2)) = \alpha$$

Si on prend par exemple $\alpha = 10^{-4}$, en vertu de la loi des grands nombres, seules 0.01% des réalisations d'une variable aléatoire Gaussienne de variance σ^2 sont susceptibles de tomber dans la région Ω_α . C'est pourquoi on pourra dire avec une bonne fiabilité que toute mesure trouvée dans Ω_α n'est pas issue de cette distribution.

Soit maintenant Z une variable aléatoire Gaussienne complexe de variance σ^2 . La région $\Omega_\alpha(\sigma^2)$ est définie par (1.26) comme précédemment, mais si on souhaite garder le même niveau α , on doit prendre un quantile c'_α différent de c_α . On peut montrer que pour α suffisamment petit, on a

$$c_\alpha \simeq \sqrt{2}c'_\alpha$$

D'autre part, après débruitage d'un signal expérimental, nous aurons besoin de vérifier si le bruit enlevé suit bien une loi de probabilité Gaussienne. Pour cela on utilisera la méthode suivante. Si $(Y_n)_{1 \leq n \leq N}$ est une suite de variables aléatoires Gaussiennes indépendantes de variance σ^2 et de moyenne nulle, on notera $Y_{(n)}$ la suite rangée par ordre croissant. La loi des grands nombres implique que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\Phi_N(t) \equiv \#\{n \mid Y_n \leq t\} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{P}\{Y \leq t\} = \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

où $\#$ désigne le cardinal de l'ensemble, et Φ est la fonction de distribution cumulée de la loi Gaussienne :

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Si on fixe maintenant N suffisamment grand, et si on prend $t = Y_{(n)}$, on a donc :

$$\Phi\left(\frac{Y_{(n)}}{\sigma}\right) \simeq \frac{n}{N}$$

ou encore

$$Y_{(n)} \simeq \sigma \Phi^{-1}\left(\frac{n}{N}\right)$$

c'est à dire que les points $(Y_{(n)}, \Phi^{-1}(\frac{n}{N}))$ sont presque alignés sur une droite de pente σ (figure 1.8(a)). On appelle ce type de graphe un graphe quantile-quantile. Pour une variable de distribution inconnue, l'écart à la droite du graphe quantile-quantile est une bonne mesure qualitative de Gaussianité. Elle est en particulier bien meilleure que la simple comparaison entre l'histogramme et la densité de probabilité théorique (b), car elle est indépendante de tout choix d'urnes. Sur les graphes quantile-quantile que nous tracerons plus loin, nous représenterons la droite passant par les points dont les coordonnées sont les quartiles (respectivement empiriques et théoriques) : $Q_1 = (Y_{(0.25 \frac{n}{N})}, \Phi^{-1}(0.25))$ et $Q_3 = (Y_{(0.75 \frac{n}{N})}, \Phi^{-1}(0.75))$. La pente de cette droite est l'inverse de l'écart type d'une loi Gaussienne approximant bien l'échantillon (mais pas nécessairement la meilleure au sens du maximum de vraisemblance).

Pour évaluer l'efficacité de ces diagnostics lorsqu'on souhaite tester la Gaussianité, on les a reproduits (c) pour une variable aléatoire Laplacienne, dont la densité de probabilité est :

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|t|}$$

Lorsqu'on aura besoin d'estimer rapidement la Gaussianité d'un processus, on pourra également utiliser les coefficients d'asymétrie S (pour 'skewness' en anglais) et d'aplatissement F (pour 'flatness' en anglais), définis par :

$$S = \frac{\langle (X - \langle X \rangle)^3 \rangle}{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (1.27)$$

$$F = \frac{\langle (X - \langle X \rangle)^4 \rangle}{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle^2} \quad (1.28)$$

Pour une variable Gaussienne, on montre que $S = 0$ et $F = 3$. Cependant il ne faut pas oublier que du fait de la puissance 4 qui apparaît au numérateur, l'estimation de F est très sensible à la présence de quelques points aberrants. Sur le tableau 1.1 nous avons rappelé les valeurs de S et F pour quelques

lois classiques. Rappelons aussi qu'on a toujours $F \geq 1$ tandis que S peut prendre n'importe quelle valeur. En outre l'écart type de l'estimation de F à partir de (1.28) pour un N -échantillon et lorsque X suit une loi Gaussienne est asymptotiquement $\sqrt{\frac{105}{N}}$. Donc par exemple lorsque $N = 16384$ il ne faut pas compter sur une précision supérieure à 10^{-1} .

Finalement, on notera qu'il existe un test de Gaussianité prenant en compte tous les moments de la distribution, le test de Shapiro-Wilk. Il est basé sur une mesure quantitative de la déviation du graphe quantile-quantile à une droite. Cependant, son application rigoureuse nécessite des mesures indépendantes, or les données que nous aurons à traiter seront fortement corrélées, et en toute rigueur il faudrait analyser les lois jointes de familles de mesures à des instants différents. Nous n'avons pas poursuivi dans cette direction.

	Normale	Uniforme	Laplace	Logistique	Gamma(k)	Gumbel	Cauchy
Assymétrie S	0	0	0	0	$\frac{2}{\sqrt{k}}$	1.14	non définie
Aplatissement F	3	-1.2	6	4.2	$3 + \frac{6}{k}$	5.4	$+\infty$

TAB. 1.1 – Valeurs de l'assymétrie de de l'aplatissement pour quelques lois classiques

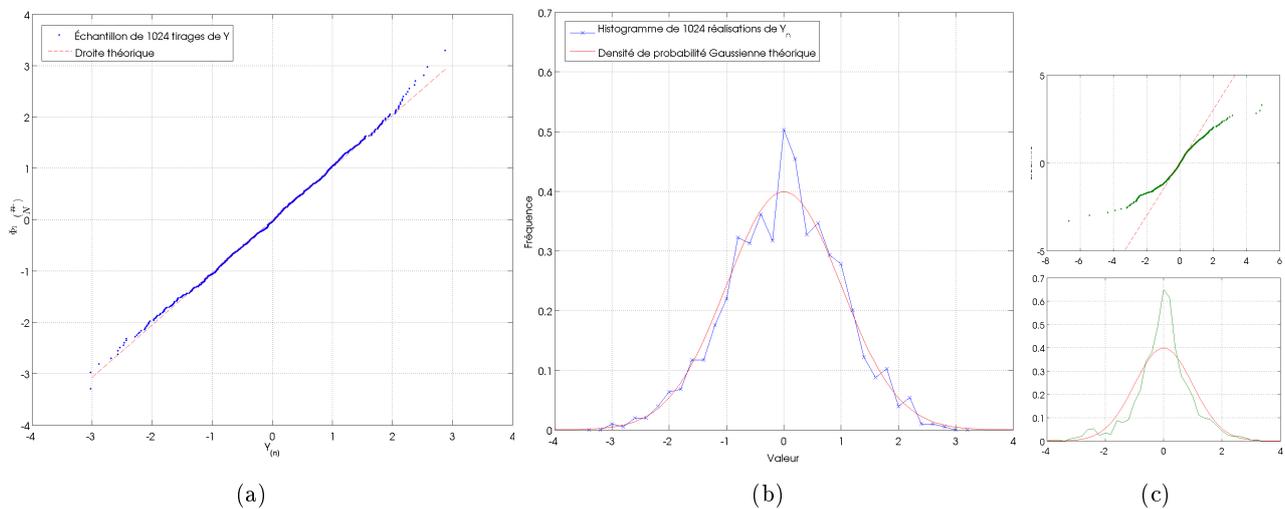


FIG. 1.8 – (a) et (b) Comparaison des résultats de deux tests qualitatifs de Gaussianité pour le même échantillon de 1024 réalisations d'une variable aléatoire effectivement Gaussienne. (a) Graphe quantile-quantile Gaussien (b) Histogramme. (c) Graphe quantile-quantile Gaussien et histogramme dans le cas d'une variable aléatoire Laplacienne (1024 réalisations)

Chapitre 2

Débruitage de signaux 1D et d'images 2D : Principe et algorithmes

2.1 Débruitage en présence d'un bruit additif blanc Gaussien

Dans ce paragraphe, nous introduisons brièvement le formalisme mathématique associé au débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes, tel qu'il est développé en détail dans [13], ainsi que l'algorithme introduit dans [2] qui sera notre point de départ pour la suite de cette étude.

2.1.1 Notations

On se place dans le cadre d'un modèle de bruit additif, où le signal observé s'écrit :

$$X[n] = F[n] + W[n], \quad n = 1..N \quad (2.1)$$

avec W un processus Gaussien de moyenne nulle, et F un signal déterministe donné par échantillonnage d'une certaine fonction définie sur $[0, 1]$:

$$F[n] = F\left(\frac{n}{N}\right)$$

On cherche à estimer F à partir d'une seule observation des données bruitées. Pour quantifier l'efficacité du débruitage on introduit le risque L^2 (ou erreur quadratique moyenne) associé à un estimateur $\mathcal{E}(X)$:

$$R(\mathcal{E}, F) = \langle \|F - \mathcal{E}(X)\|_2^2 \rangle = \sum_{n=1}^N \langle |F[n] - \mathcal{E}(X)[n]|^2 \rangle$$

Une quantité équivalente que nous utiliserons souvent est le rapport signal sur bruit (SNR) mesuré en décibels, défini par

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\|F\|_2^2}{R(\mathcal{E}, F)} \right)$$

Le cas échéant, il sera intéressant de considérer le risque relatif $\frac{R(\mathcal{E}, F)}{E_N}$, où l'énergie du bruit E_N est définie par :

$$E_N = \sum_{n=1}^N \langle |W[n]|^2 \rangle$$

On souhaite construire un estimateur \mathcal{E} qui vérifie

$$\frac{R(\mathcal{E}, F)}{E_N} \ll 1$$

pour toutes les fonctions F susceptibles de représenter nos signaux. Afin de formaliser la connaissance *a priori* que l'on a du signal, on suppose qu'il appartient à un certain ensemble de fonctions Θ , et on souhaite alors que l'estimateur \mathcal{E} minimise le risque maximum :

$$R(\mathcal{E}, \Theta) = \sup_{F \in \Theta} R(\mathcal{E}, F) \quad (2.2)$$

c'est-à-dire que le risque associé à \mathcal{E} soit égal au risque minimax non linéaire :

$$R_n(\Theta) = \inf_{\mathcal{E}} R(\mathcal{E}, \Theta)$$

où la borne inférieure est prise sur tous les estimateurs \mathcal{E} possibles. Dans le formalisme minimax, deux paramètres peuvent donc influencer la qualité de l'estimation optimale :

- l'espace Θ dans lequel on se place (ce point est détaillé dans [13]),
- le type de bruit que l'on considère

On utilisera désormais la notation $\tilde{\cdot}$ pour désigner les estimateurs statistiques : $\mathcal{E}(X) = \tilde{F}$

2.1.2 Seuillage des coefficients d'ondelettes

Donoho et Johnstone ont introduit [5] la méthode de seuillage des coefficients d'ondelette pour le débruitage de signaux non-stationnaires. Cette méthode, que nous allons maintenant brièvement exposer, permet de se rapprocher du risque minimax non-linéaire pour une classe très générale d'ensembles Θ , c'est pourquoi on parle de méthode adaptative. La propriété essentielle qui doit être vérifiée par les éléments de Θ pour que la méthode fonctionne est la régularité locale. Intuitivement, on peut concevoir un signal localement régulier comme présentant seulement quelques singularités isolées.

On se fixe d'abord une base orthonormale d'ondelettes, dans laquelle on calcule les coefficients du signal bruité $(\tilde{X}_{j,k})$. Par transformation linéaire de l'équation (2.1), on obtient une équation identique pour les coefficients d'ondelettes et de fonctions d'échelle du signal :

$$\tilde{X}_{j,k} = \tilde{F}_{j,k} + \tilde{W}_{j,k} \quad (2.3)$$

$$\tilde{X}_{L,k} = \tilde{F}_{L,k} + \tilde{W}_{L,k} \quad (2.4)$$

Nous supposons désormais que W est un bruit blanc Gaussien. Grâce aux propriétés de la loi Gaussienne, les coefficients d'ondelettes du bruit sont donc Gaussiens et indépendants. L'intérêt de (2.3-2.4) par rapport à (2.1) est que pour les signaux localement réguliers que nous considérons, l'énergie de F est concentrée sur un faible pourcentage des coefficients d'ondelettes $\tilde{F}_{j,k}$, les autres étant très proches de zéro. On dit que ces signaux ont une représentation sporadique en base d'ondelettes. Cette propriété est liée au nombre de moments nuls de l'ondelette analysante comme nous l'avons évoqué à la fin du paragraphe 1.1.1.

L'énergie du bruit en revanche est distribuée équitablement entre tous les coefficients $\tilde{W}_{j,k}$. Or pour α suffisamment petit, ces coefficients ont une forte probabilité d'être inférieurs en valeur absolue à σc_α (cf. 1.2.6). On estime donc que les coefficients d'ondelettes contenant la majorité de l'énergie du signal sont les coefficients α -aberrants du point de vue du bruit. Les autres coefficients d'ondelettes du signal sont perdus sous le niveau du bruit, mais ils ne représentent qu'une minorité de l'énergie du signal. On les estime donc par la valeur 0 :

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{F}}_{j,k} &= \tilde{Y}_{j,k} & \text{si } |\tilde{Y}_{j,k}| > \sigma c_\alpha \\ \tilde{\tilde{F}}_{j,k} &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

On dit qu'on a effectué un seuillage des coefficients d'ondelettes. Considérant que l'énergie à grande échelle provient essentiellement du signal et non du bruit, on n'applique par contre pas de seuillage aux coefficients de fonctions d'échelle :

$$\tilde{\tilde{F}}_{L,k} = \tilde{Y}_{L,k}$$

On peut ensuite estimer F par transformée en ondelettes inverse des $(\tilde{\tilde{F}}_{L,k}, \tilde{\tilde{F}}_{j,k})$. Donoho et Johnstone ont démontré plusieurs résultats mathématiques qui garantissent l'efficacité de cette méthode. En particulier, ils ont montré que lorsque le nombre de points N auxquels on échantillonne le signal tend vers l'infini, le risque associé à cet estimateur est proche du risque minimax non-linéaire $R_n(\Theta)$, pour toute une variété d'ensembles Θ que nous ne détaillerons pas ici. Nous verrons plus loin des exemples qui illustrent l'efficacité pratique de cette méthode.

Notons cependant que pour l'appliquer il est nécessaire de connaître la variance σ^2 du bruit. En pratique, on doit estimer cette variance à partir du signal bruité, ce que nous allons faire dès à présent.

2.1.3 Estimation de la variance

Du fait de la régularité locale du signal, la meilleure échelle pour estimer la variance du bruit est la plus petite échelle. Cependant, le signal n'est pas partout régulier au sens de Lipschitz, et la variance empirique des coefficients d'ondelettes à la plus petite échelle, qui est trop sensible aux quelques grands coefficients d'ondelettes, ne peut pas être utilisée directement. On doit utiliser un estimateur de la variance qui est robuste, c'est à dire insensible aux valeurs les plus grandes. Dans le domaine du débruitage, on utilise couramment la déviation médiane, qui est l'estimateur le plus robuste. Cependant, pour les signaux qui nous intéresseront, on préférera utiliser la méthode itérative suivante, introduite dans [2] :

1. on initialise : $l = 0$ et $\Lambda_{(0)}$ est l'ensemble de tous les coefficients d'ondelettes de X
2. on calcule la variance empirique des éléments de $\Lambda_{(l)}$

$$\sigma_{(l)}^2 = \frac{1}{\#\Lambda_{(l)}} \sum_{\Lambda_{(l)}} |\tilde{X}_{j,k}|^2$$

3. on extrait les indices $\tilde{X}_{j,k}$ qui sont α -aberrants par rapport à la variance $\sigma_{(0)}^2$
4. $\Lambda_{(l+1)}$ est défini comme l'ensemble des coefficients d'ondelettes restants
5. si $\Lambda_{(l)} = \Lambda_{(l+1)}$ l'algorithme se termine, sinon on retourne à l'étape 2 avec $l \rightarrow l + 1$

La convergence en un nombre fini d'itérations de cet algorithme sous des formes légèrement différentes a pu être démontrée [2, 9]. Nous admettrons ici qu'elle a lieu, ce que nous avons observé dans toutes les situations pratiques. $\sigma_{(l)}^2$ est ensuite retenu comme estimation robuste de la variance du bruit. En effet, par définition, l'ensemble $\Lambda_{(l)}$ ne contient plus aucun point α -aberrant, tandis que son complémentaire ne contient que des points α -aberrants. La figure (2.1) montre un exemple de débruitage d'un signal régulier par morceaux (a) détérioré par un bruit blanc Gaussien additif de variance $\sigma^2 = 25$ (b). L'algorithme itératif a donné 25.6 comme estimation de σ^2 ce qui a permis d'appliquer le seuillage (2.1.2) aux coefficients d'ondelettes et d'obtenir une bonne estimation (c) du signal de départ.

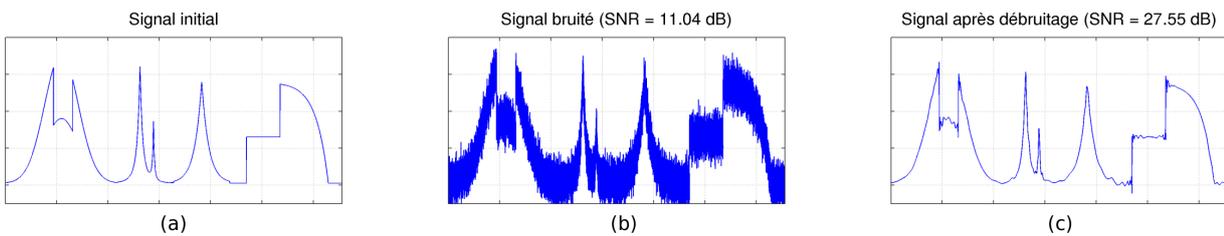


FIG. 2.1 – Débruitage d'un signal régulier par morceaux, par seuillage de ses coefficients d'ondelettes. Le seuil est déterminé par la procédure itérative décrite au paragraphe 2.1.3.

2.2 Débruitage en présence d'un bruit additif Gaussien corrélé

Comme cela a été proposé à maintes reprises [17, 16, 10], on peut généraliser la méthode de débruitage en ondelettes à des bruits corrélés en appliquant un seuil différent à chaque échelle. Tout au long de cette étude, nous ne chercherons pas à établir de résultats mathématiques concernant le comportement asymptotique des méthodes de débruitage proposées lorsque la résolution d'échantillonnage tend vers l'infini. Nous raisonnerons à résolution fixée, en faisant varier la corrélation du bruit. Dans un premier temps, nous mettrons en évidence deux obstacles qui empêchent de réaliser un débruitage efficace pour des corrélations quelconques du bruit. Puis nous introduirons des hypothèses supplémentaires qui permettent de débruiter une classe de bruits dont la régularité est suffisamment faible. Enfin, nous verrons comment réaliser ce débruitage dans la pratique.

2.2.1 L'obstacle de la régularité

Nous avons déjà souligné l'importance de la notion de régularité pour le débruitage. C'est la régularité locale qui contrôle la sporadicité de la transformée en ondelettes du signal, et donc la possibilité de l'extraire d'un bruit blanc. Si dans (2.1) W n'est plus un bruit blanc mais un processus Gaussien stationnaire quelconque, il se peut que ses trajectoires soient plus régulières que celles d'un bruit blanc, c'est-à-dire que ses coefficients d'ondelette tendent vers zéro aux petites échelles. Nous continuerons cependant à appeler W un bruit car il perturbe l'observation du signal F . Mais l'énergie de ce bruit, au lieu d'être également répartie entre tous les coefficients d'ondelettes, sera variable suivant les échelles. Par analogie avec le cas du bruit blanc, on voit qu'il faut maintenant appliquer un seuil différent à chaque échelle :

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{F}}_{j,k} &= \tilde{Y}_{j,k} & \text{si } |\tilde{Y}_{j,k}| < \sigma_j c_\alpha \\ \tilde{\tilde{F}}_{j,k} &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

où σ_j est la variance du bruit à l'échelle j . Voyons comment les performances du débruitage sont affectées par la présence de corrélations dans le bruit, pour les deux modèles de corrélations que nous avons introduits. Afin de s'affranchir du problème d'estimation de la variance, nous nous placerons dans le cas idéal où on connaît à l'avance le signal F à débruiter, auquel cas on peut calculer la valeur de c_α qui minimise le risque à chaque échelle (figure 2.2). On dit qu'on réalise un débruitage par seuillage avec oracle.

Dans chaque cas, on met en évidence une limite forte au débruitage par seuillage des coefficients d'ondelettes :

- pour le bruit Gaussien fractionnaire, lorsque l'exposant de Hurst tend vers 1
- pour le bruit corrélé exponentiellement, lorsque le temps de corrélation dépasse quelque pourcents de la taille du signal

Dans chaque cas, plus le bruit devient organisé à grande échelle, moins le débruitage est efficace. Ce résultat restera qualitativement vrai quels que soient les bruits et les signaux considérés, bien que les seuils critiques puissent bien entendu varier. Étant donné le résultat obtenu sur le bruit Gaussien fractionnaire, nous proposons comme mesure du degré d'organisation du bruit la régularité de ses trajectoires.

Mais remarquons que pour le bruit corrélé exponentiellement, la décroissance du spectre reste en ν^{-2} quel que soit le temps de corrélation, ce qui implique que la régularité des trajectoires, au sens mathématique, ne change pas. Pourtant, augmenter le temps de corrélation revient à déplacer l'énergie vers les basses fréquences (figure 1.6), ce qui augmente le degré d'organisation du bruit jusqu'au point où il n'est plus possible de le distinguer du signal. Nous verrons dans la partie 4 un cas concret où cela se produit. Malheureusement, nous n'avons pas trouvé de solution pour résoudre ce problème.

2.2.2 L'obstacle de l'estimation de la covariance

Dans le paragraphe précédent, nous avons utilisé le seuil optimal échelle par échelle calculé en connaissant à l'avance le signal à débruiter. En pratique, on n'a jamais accès à ce seuil optimal, et on doit choisir un seuil en estimant la variance de chaque coefficient d'ondelettes du bruit. Si on ne faisait aucune hypothèse sur la fonction de covariance \hat{c} , il faudrait l'estimer en N points à partir d'un échantillon de N valeurs de X , ce qui est évidemment irréaliste. On se placera donc uniquement dans le cas de bruits vérifiant les hypothèses du paragraphe 1.2.5.

On doit donc estimer la variance σ_j^2 des coefficients d'ondelettes du bruit à chaque échelle. Deux problèmes bien distincts vont limiter la qualité de cette estimation :

1. Une limitation d'ordre statistique, car aux grandes échelles on dispose de très peu de coefficients d'ondelettes pour réaliser cette estimation. D'après le théorème de la limite centrale, on sait que l'erreur sur l'estimation d'une moyenne statistique à partir de 2^j réalisations décroît en $2^{-j/2}$. Plus précisément, on montre que l'écart type de l'estimation de σ_j^2 par la variance empirique pour un bruit Gaussien est égal à $\sqrt{\frac{2}{2^j-1}}\sigma_j$. Afin d'avoir une erreur relative inférieure à 10% avec une probabilité supérieure à 0.95, on ne doit donc procéder à cette estimation que si $j \geq 8$.

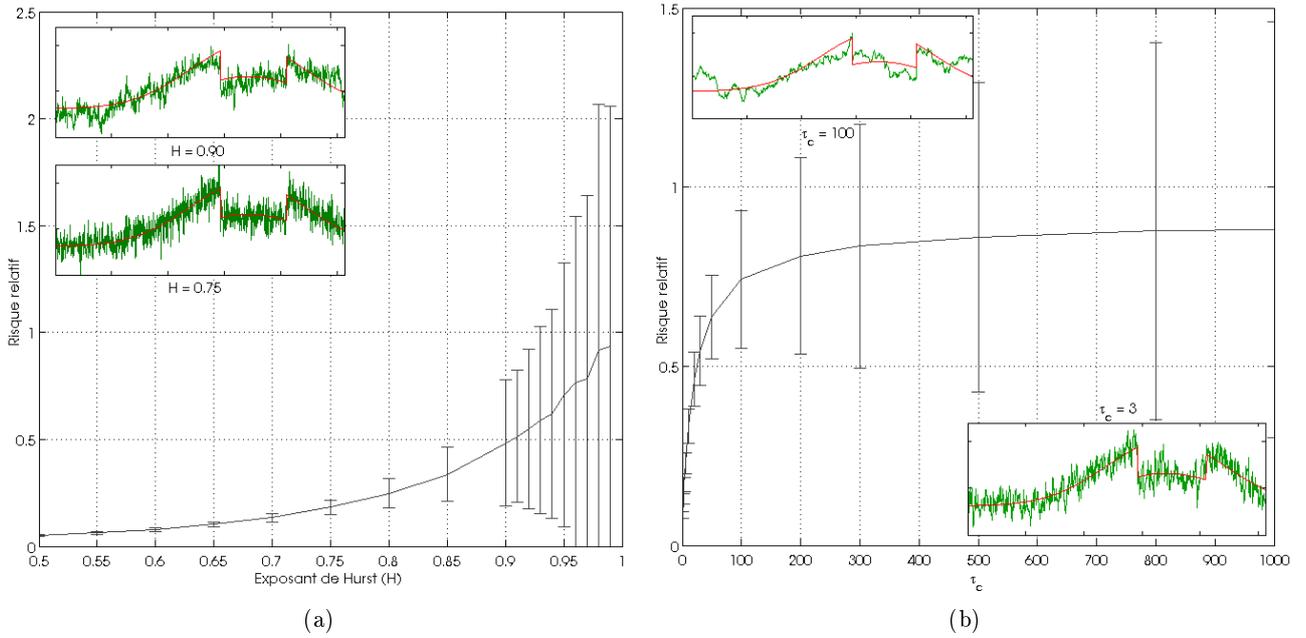


FIG. 2.2 – Influence des corrélations du bruit sur les performances du débruitage. Pour le signal régulier par morceau (figure 2.1) contaminé par un bruit corrélé, on a tracé le risque relatif de l’estimateur par seuillage optimal échelle par échelle (moyenné sur 1000 réalisations du bruit). On a considéré les deux modèles de bruit développés au paragraphe 1.2, soit (a) un bruit Gaussien fractionnaire où l’on fait varier l’exposant de Hurst, soit (b) un bruit à corrélations exponentielles, où l’on fait varier le temps de corrélation. Le rapport signal sur bruit est fixé à 5 dB et la résolution à $N = 2^{12} = 4096$. Chaque encart montre un zoom sur les 1024 premiers points du signal original (rouge) ou bruité (vert). Les barres d’erreur donnent une indication sur la variabilité du risque au sein des 1000 réalisations.

- Il ne suffit plus que la représentation de F en base d’ondelettes soit globalement sporadique, il faut maintenant qu’à chaque échelle où l’on va estimer le bruit, suffisamment peu de coefficients d’ondelettes soient affectés par F . En général, on s’attend à ce que F soit sporadique seulement aux échelles les plus fines. On définit donc j_{sp} comme l’échelle la plus grossière où il est possible d’estimer la variance du bruit. Dans [10], les auteurs proposent d’utiliser les connaissances que l’on a sur le signal pour fixer *a priori* l’échelle j_{sp} . Nous verrons dans le paragraphe suivant une façon d’estimer j_{sp} en faisant seulement une hypothèse supplémentaire sur le bruit.

2.2.3 L’algorithme itératif échelle par échelle

D’après ce que nous avons vu au paragraphe 2.2.1, on peut conjecturer que l’hypothèse qui donnerait les meilleurs résultats est que la variance du bruit ne soit pas trop concentrée aux grandes échelles. En effet, cela engloberait à la fois le problème des corrélations à portée finie et des corrélations à portée infinie. Cependant il n’est pas possible en pratique de vérifier si cette hypothèse est réalisée, car il faudrait estimer la variance du bruit à toutes les échelles, or on n’a en général accès qu’à la variance du bruit aux échelles les plus fines. On choisit donc comme pis-aller de mesurer la régularité des trajectoires du bruit. Pour cela, on introduit la quantité

$$q_j = \log_2(\sigma_{j-1}^2) - \log_2(\sigma_j^2)$$

Supposons que

$$\forall j, q_j < q_{max} \tag{2.5}$$

alors en sommant ces inégalités :

$$\log_2(\sigma_L^2) - \log_2(\sigma_j^2) < (J - L)q_{max}$$

ce qui est équivalent à

$$\forall j, \sigma_j^2 > 2^{(j-L)q_{max}} \sigma_L^2$$

D'après le théorème (1.4) c'est une condition suffisante pour que la régularité Lipschitzienne des trajectoires soit inférieure à $\frac{q_{max}-1}{2}$. Cette condition conduit naturellement à l'algorithme suivant pour l'estimation de la variance du bruit à chaque échelle :

1. initialiser $j = J$, et calculer σ_j^2 par la méthode itérative du paragraphe 2.1.3 appliquée aux seuls coefficients d'ondelettes à l'échelle j , $\{\tilde{X}_{j,k}\}$.
2. estimer σ_{j-1}^2 de la même façon
3. calculer q_j
4. si $q_j \leq q_{max}$, faire $j \rightarrow j + 1$, retourner à l'étape 2
5. si $q_j > q_{max}$, l'estimation σ_{j-1}^2 n'est pas compatible avec notre hypothèse sur le bruit. Notre méthode ne permet donc pas d'estimer de façon consistante la variance du bruit aux échelles plus grossières que $j = j_{sp}$ (où l'indice sp signifie sporadique) et nous devons procéder d'une autre manière.

Pour débruiter le signal aux échelles $j < j_{sp}$, nous avons envisagé deux méthodes :

1. Extrapolation : si on dispose d'un modèle paramétrique pour le bruit, l'information obtenue aux échelles les plus fines peut suffire à déterminer σ_j à toutes les échelles. Par exemple, un bruit Gaussien fractionnaire est entièrement caractérisé par deux paramètres, σ^2 et H . On peut estimer simplement H à partir de σ_J et σ_{J-1} grâce à (1.24). On obtient ensuite σ_j pour tout j par extrapolation.
2. Seuil conservatif : on estime la variance aux échelles non sporadiques par $\sigma_{j_{sp}}^2$, c'est-à-dire la variance à la dernière échelle sporadique.

2.2.4 Cas 2D et utilisation des ondelettes à valeurs complexes

La méthode du paragraphe précédent se généralise simplement au cas 2D à condition de considérer indépendamment les variances dans chaque direction, $\sigma_{j,\epsilon}^2$. On peut faire le lien avec la régularité Lipschitzienne du bruit exactement de la même façon qu'en 1D, mais nous ne détaillerons pas ce point.

De même, dans tout ce qui précède, nous n'avons pas utilisé le fait que les coefficients d'ondelettes étaient à valeurs réelles. Nous avons juste utilisé la définition des points α -aberrants et de la covariance. Or nous avons vu dans la partie 2 que ces définitions avaient leur équivalent pour les processus à valeurs complexes. La même méthode de débruitage peut donc être appliquée dans une *frame* d'ondelettes à valeurs complexes, pour les bruits blancs comme pour les bruits corrélés, en 1D comme en 2D.

2.2.5 Choix du paramètre c_α

Supposons qu'on dispose de M réalisations indépendantes d'une variable aléatoire Gaussienne standard, par exemple les coefficients d'ondelettes d'un signal à une échelle donnée. Pour un certain α fixé, on a vu (paragraphe 1.2.6) que la probabilité que le module d'une de ces réalisations soit plus grand que c_α est égale à α . Le nombre de réalisations de module plus grand que c_α est donc de l'ordre de αM . Pour que ce nombre reste borné, il faut faire dépendre α de M :

$$\alpha < \frac{1}{M}$$

On montre que le choix $c_\alpha = \sqrt{2 \log M}$ pour les ondelettes réelles (et donc $c'_\alpha = \sqrt{\log N}$ pour les ondelettes complexes) permet de remplir cette condition. C'est donc la valeur que nous avons adoptée. Par exemple, pour estimer la variance à l'échelle j d'un signal 1D, nous disposons de 2^j coefficients d'ondelettes réels, et nous prendrons donc $c_\alpha = \sqrt{2 \log(2^j)}$. Notons que ce choix n'a rien d'universel. On peut montrer que pour le débruitage d'images visuelles, une valeur plus petite de c_α donne des résultats plus satisfaisants.

2.3 Comparaison des algorithmes dans le cas de signaux académiques 1D et 2D

Avant d'utiliser les algorithmes pour le débruitage de signaux expérimentaux, il convient d'étudier leurs performances pour le débruitage de signaux connus à l'avance auxquels on a ajouté un bruit simulé numériquement. En 1D nous utiliserons le signal régulier par morceau déjà présenté. En 2D, nous utiliserons le champ scalaire représenté sur la figure (2.3), qui est une somme de fonctions Gaussiennes ayant des poids, des variances et des positions aléatoires.

Pour rester au plus près des situations physiques que nous traiterons dans la dernière partie, nous garderons la résolution fixée à $N = 2^{14} = 16384$ en 1D et $N^2 = 2^9 \times 2^9 = 512 \times 512$ en 2D. Sauf mention contraire, nous utiliserons $q_{max} = 2$, afin de prendre en compte tous les modèles de bruit que nous avons introduits.

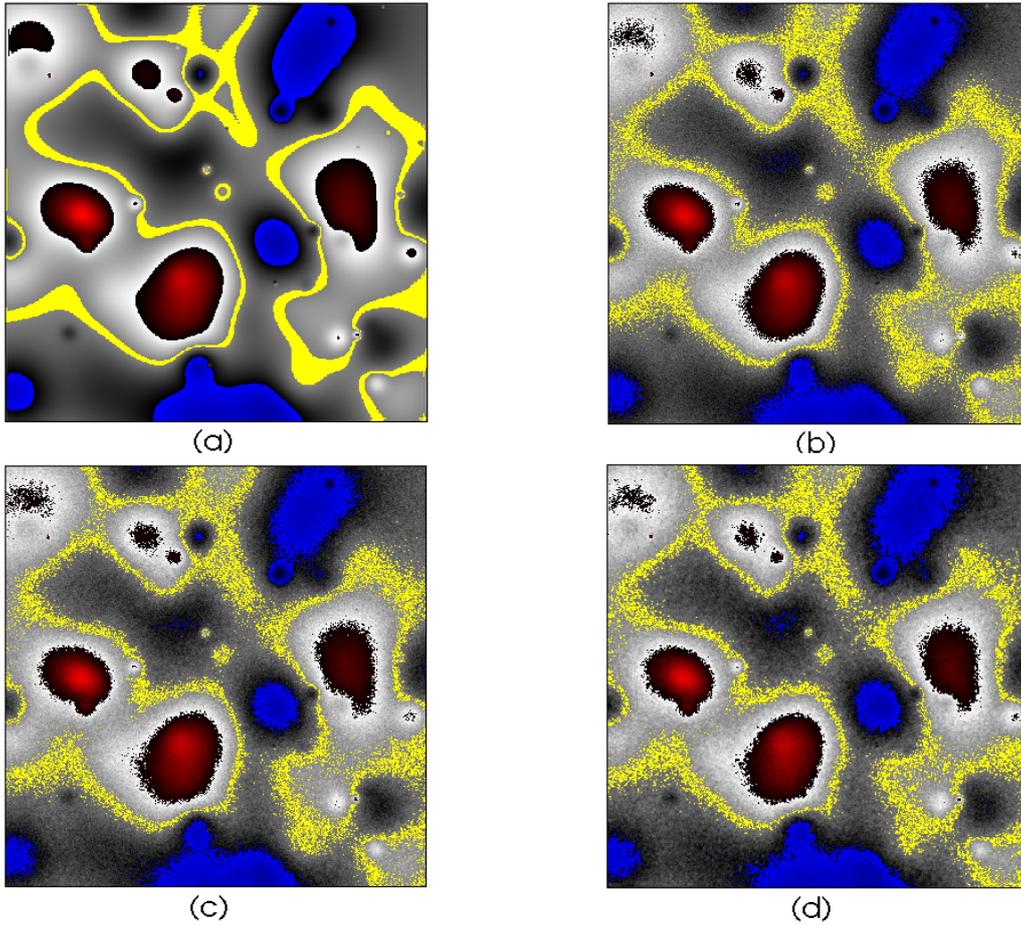


FIG. 2.3 – (a) Champ académique 2D construit par sommation de fonctions Gaussiennes. (b,c,d) Le même signal auquel on a ajouté un bruit Gaussien présentant différents types de corrélations, avec un rapport signal sur bruit constant de $17.71dB$: (b) non corrélé, (c) corrélé à portée infinie, (d) corrélé à portée finie

2.3.1 Bruit blanc 1D et 2D

Dans le cas du bruit blanc, nous nous intéressons essentiellement à la comparaison entre ondelettes réelles et ondelettes complexes. Nous souhaitons aussi vérifier que l'algorithme échelle par échelle, qui est construit sur des hypothèses plus générales, s'adapte au cas du bruit blanc sans perte de performance. Les résultats sont résumés dans le tableau 2.1a et montrent que :

- l'utilisation des ondelettes à valeurs complexes apporte un gain important de performances, ce qui est lié à l'invariance par translation de cette représentation
- les algorithmes échelle par échelle s'adaptent bien au cas du bruit blanc sans perte de performance

2.3.2 Modèle paramétrique de bruit Gaussien fractionnaire

Nous avons testé la méthode d'extrapolation décrite à la fin du paragraphe 2.2.3 pour le débruitage d'un bruit blanc et d'un bruit Gaussien fractionnaire d'exposant de Hurst $H = 0.75$ (tableau 2.1b). Cette méthode est explicitement construite pour débruiter les bruits Gaussiens fractionnaires, aussi s'attend-on à de très mauvais résultats lorsque le bruit ne vérifie pas ce modèle paramétrique. Pour le montrer, nous avons considéré des bruits présentant des corrélations exponentielles avec deux temps de corrélations différents.

Pour les deux bruits vérifiant le modèle paramétrique, le débruitage permet bien une augmentation substantielle du rapport signal sur bruit. Cependant cet algorithme est très vulnérable à tout écart entre le bruit réel et le modèle, comme le montrent les résultats très médiocres obtenus en présence de bruits corrélés exponentiellement.

2.3.3 Bruits corrélés sans modèle paramétrique

Afin de voir si on peut s'affranchir d'un modèle paramétrique pour le bruit, revenons maintenant à l'hypothèse (2.5) avec $q_{max} = 2$. Pour le débruitage des échelles non sporadiques, nous utiliserons le seuil conservatif. Dans le tableau 2.1c, nous avons comparé les performances du débruitage par l'algorithme itératif appliqué de quatre façons différentes :

1. à tous les coefficients d'ondelettes réelles (c'est le cas standard),
2. à tous les coefficients d'ondelettes à valeurs complexes,
3. aux coefficients d'ondelettes réels, échelle par échelle,
4. aux coefficients d'ondelettes complexes, échelle par échelle.

Enfin, nous avons cité comme valeur de référence les performances du débruitage avec un seuil échelle par échelle avec oracle (cf. 2.2.1) appliqué aux coefficients d'ondelettes réelles. Rappelons que ce type de seuil ne peut pas être utilisé dans la pratique car on doit connaître à l'avance le signal à débruiter pour le calculer.

Dans tous les cas, l'algorithme échelle par échelle est plus performant que l'algorithme ne distinguant pas entre les échelles. L'utilisation des ondelettes à valeurs complexes permet également un gain substantiel d'environ $1dB$. Le point important est que l'algorithme échelle par échelle s'adapte à trois fonctions de corrélation très différentes, sans avoir besoin de spécifier un modèle paramétrique.

Pour le champ académique 2D, la situation est plus compliquée (tableau 2.1d), essentiellement parce que la résolution dans chaque direction est de seulement 512 au lieu de 2^{14} . On est donc très loin d'une situation asymptotique idéale. Pour le modèle de corrélations à courte portée, le débruitage échelle par échelle l'emporte bien, à condition de prendre $q_{max} = 2$, ce qui correspond bien au spectre (1.22). L'amélioration apportée par la prise en compte de corrélations est particulièrement notable dans le cas des ondelettes complexes ($2dB$). Pour le modèle de corrélations à longue portée, contrairement au cas 1D, l'algorithme échelle par échelle avec $q_{max} = 2$ ne parvient pas à s'adapter. Même la condition plus restrictive $q_{max} = 1$ n'améliore pas sensiblement les performances par rapport à l'algorithme standard.

2.3.4 Estimation de la puissance spectrale du bruit

Afin d'évaluer les performances des algorithmes d'extraction échelle par échelle en ondelettes réelles et complexes, nous avons considéré les mêmes cas 1D qu'au paragraphe précédent et nous avons maintenu $q_{max} = 2$ dans tous les cas. On constate qu'aux échelles $j \geq 8$ le signal est sporadique et les estimations de la variance sont très bonnes jusqu'à $j = 9$ (figure 2.4). La précision est en particulier suffisante pour distinguer les cas de corrélations à courte portée avec $\tau_C = 1$ et le bruit Gaussien fractionnaire avec $H = 0.75$. Dans ce dernier cas, on peut envisager d'estimer l'exposant de Hurst par régression linéaire à partir des plus petites échelles [1].

	Bruité	Réel	Complexe	Réel par échelle	Complexe par échelle
1D	11.06	25.6	27.3	26.3	27.6
2D	17.71	28.9	33.2	28.1	33.0

(a) Comparaison entre ondes réelles et complexes

	Bruit blanc
Bruit Gaussien fractionnaire ($H = 0.75$)	23.5
Corrélations exponentielles ($\tau_C = 1$)	18.1
Corrélations exponentielles ($\tau_C = 10$)	16.2
Corrélations exponentielles ($\tau_C = 10$)	9.77

(b) Débruitage avec un modèle paramétrique de bruit Gaussien fractionnaire

	Réel	Complexe	Réel par échelle	Complexe par échelle	Réel par échelle avec oracle
Bruit Gaussien fractionnaire ($H = 0.75$)	19.5	19.7	19.8	20.7	20.2
Corrélations exponentielles ($\tau_C = 1$)	23.5	24.8	24.4	25.4	24.6
Corrélations exponentielles ($\tau_C = 10$)	12.9	12.4	17.5	18.8	18.4

(c) Débruitage par l'algorithme itératif échelle par échelle en 1D

	Réel	Complexe	Réel par échelle	Complexe par échelle	Réel par échelle	Complexe par échelle
Corrélations à courte portée	21.1	21.5	($q_{max} = 2$) 21.5	($q_{max} = 2$) 23.5	($q_{max} = 1$) 20.4	($q_{max} = 1$) 21.6
Corrélations à longue portée	27.4	29.8	25.5	29.3	27.3	30.0

(d) Débruitage par l'algorithme itératif échelle par échelle en 2D

TAB. 2.1 – Comparaison des rapports signal sur bruit pour le débruitage. L'unité est le décibel. Les différents cas sont détaillés dans le paragraphe 2.3. On a utilisé un seul signal bruité 1D et un seul champ bruité 2D pour tous les débruitages. Leurs rapports signal sur bruit respectifs apparaissent dans la première colonne du tableau (a).

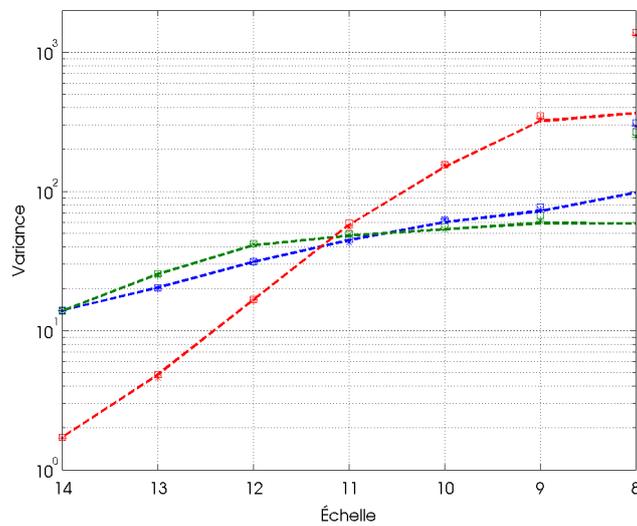


FIG. 2.4 – Estimation de la variance du bruit par l’algorithme itératif échelle par échelle. Rouge : bruit corrélé exponentiellement ($\tau_C = 10$). Vert : bruit corrélé exponentiellement ($\tau_C = 1$). Bleu : bruit Gaussien fractionnaire ($H = 0.75$). Dans chaque cas, la courbe en pointillé est la variance empirique réelle du bruit et les symboles (étoiles et carrés) sont les estimations à partir des coefficients d’ondelettes (resp. réelles et complexes) du signal bruité. Dans tous les cas on a $j_{sp} = 8$, la variance pour les échelles $j < 8$ ne peut donc pas être estimée. Notons que la variance à l’échelle 8 est largement surestimée.

Chapitre 3

Analyse en ondelettes continues de signaux 1D de Tore Supra (tir #35000)

3.1 Protocole expérimental

Dans le tokamak Tore Supra, un plasma chaud est confiné par un champ magnétique intense dans des tubes de flux de forme torique emboîtés les uns dans les autres. Comme le confinement n'est pas parfait, une partie des électrons et des ions qui composent le plasma s'échappent de ces tores et vont collisionner sur des éléments solides prévus à cet effet, les limiteurs. Entre la dernière surface de flux fermée (LCFS) et les limiteurs se trouve une région de forts gradients de température et de densité, appelée SOL (scrape-off layer).

On dispose de mesures du courant de saturation ionique arrivant sur une des électrodes d'une sonde de Langmuir placée dans la SOL, successivement à quatre valeurs différentes de la distance r à la LCFS (figure 3.1). Pour des raisons que nous ne détaillerons pas ici, ce courant de saturation est proportionnel à la densité $n(t)$ d'ions au voisinage de la sonde. En analysant des séries temporelles enregistrées pendant $16ms$ à une fréquence de $1MHz$, on cherche à caractériser les bouffées intermittentes qui jouent un rôle important pour le transport de particules et de chaleur à travers la SOL.

On dispose également de mesures du potentiel flottant qui, sous certaines hypothèses, dépend linéairement du potentiel plasma. Les isolignes du potentiel plasma dans le plan poloidal sont quant-à-elles reliées aux lignes de champ de la vitesse de dérive ionique. Dans la suite, nous parlerons du potentiel sans nous soucier de la signification physique de ces mesures. Nous oublierons également les unités associées aux grandeurs physiques car bien que les algorithmes que nous utilisons soient non linéaires, leurs résultats ne sont pas affectés si on multiplie le signal d'entrée par une constante.

3.2 Propriétés des séries temporelles

Quatre peloches de la sonde (figure 3.2), notées $IA1$, $IA2$, $IA3$ et $IB2$ mesurent le courant de saturation. Les deux peloches restantes ($VB1$ et $VB3$) mesurent le potentiel flottant. Pour chaque peloches nous disposons de 5 séries temporelles indépendantes. La première a été acquise en l'absence de plasma, et les quatre autres correspondent à quatre distances r différentes entre la sonde et la LCFS : $r = 15, 20, 35$ et $70mm$. Pour une distance r donnée, les mesures des six peloches sont effectuées simultanément, et il existe des corrélations entre les séries temporelles correspondantes. Notons que pour pouvoir effectuer les transformations en ondelettes, nous avons dû augmenter la taille des signaux jusqu'à $N = 2^{14} = 16384$, en complétant par la valeur moyenne entre $t = 16001$ et $t = 16384$. En revanche, toute l'analyse ultérieure (spectres, calcul des moments, etc) est faite uniquement sur l'intervalle de temps $[1, 16000]$.

3.2.1 Mesures de courant de saturation

La figure 3.3 illustre les propriétés les plus immédiates des mesures du courant de saturation en prenant l'exemple de la peloches $IB2$. C'est une quantité positive dont la moyenne et la variance décroissent à mesure que la sonde s'éloigne du plasma. À première vue, seuls les signaux correspondant

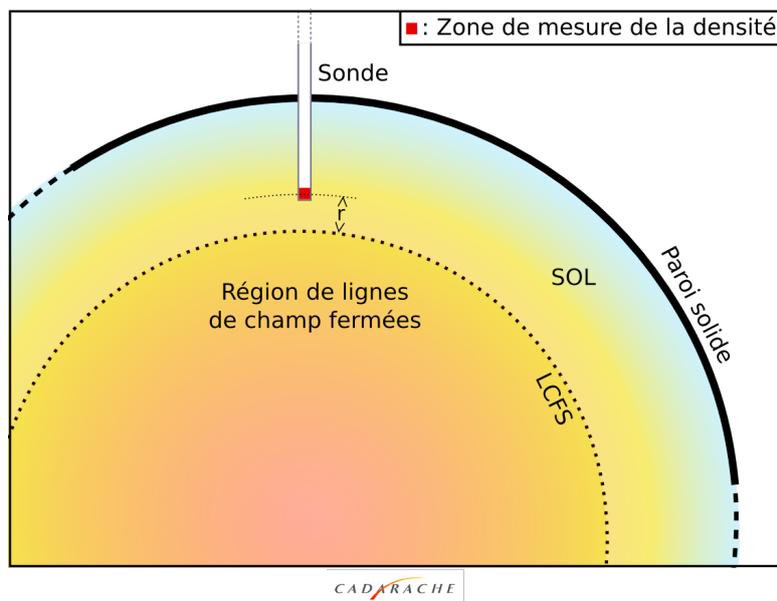


FIG. 3.1 – Section verticale du tokamak Tore Supra indiquant la distance séparant la sonde de la dernière surface de flux fermée (LCFS). La sonde est mobile verticalement et ne doit rester plongée dans la SOL que pendant le bref instant nécessaire à la mesure, faute de quoi elle serait détériorée.

à $r = 35\text{mm}$ et $r = 70\text{mm}$ présentent des excursions piquées jusqu'à des valeurs de l'ordre de 3 fois supérieures à la médiane. Les graphes quantile-quantile montrent que les distributions de ces signaux sont toutes asymétriques et sous-Gaussiennes du côté gauche. Elles sont de plus sur-Gaussiennes du côté droit lorsque $r \geq 20\text{mm}$, et sous-Gaussienne du côté droit lorsque $r = 15\text{mm}$. Ce type d'asymétrie se retrouve souvent pour les distributions supportées sur $[0, +\infty[$, comme par exemple les lois Gamma.

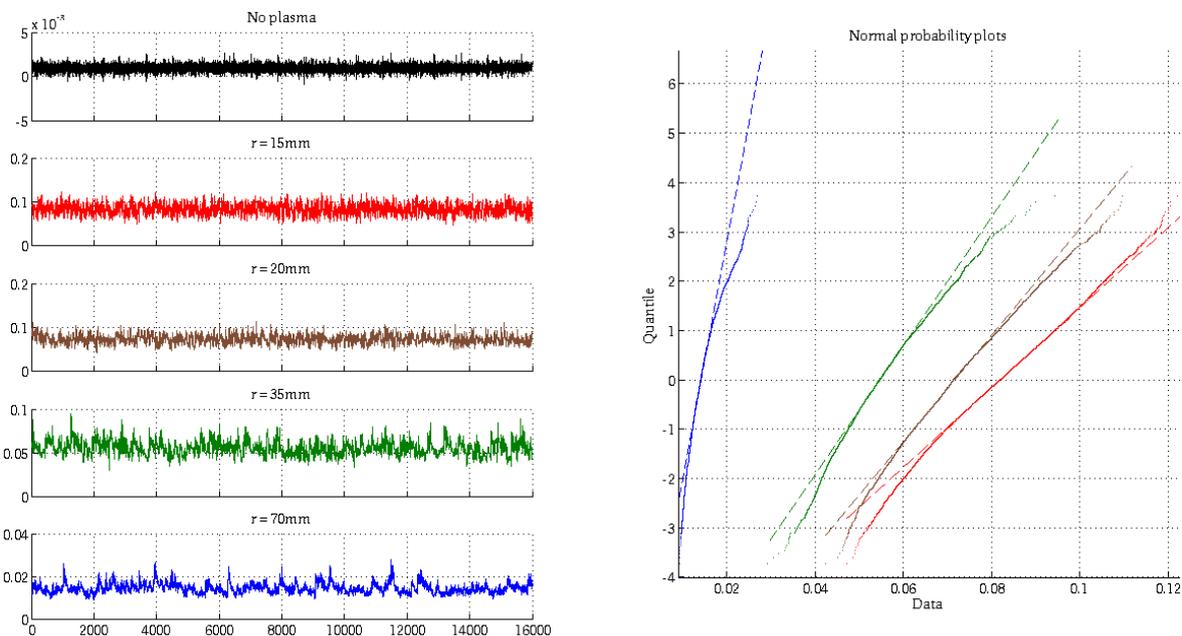


FIG. 3.3 – Signaux d'intensité $IB2$ et leurs graphes quantile-quantile Gaussiens

3.2.2 Mesures de potentiel

Considérons maintenant la pelоче $VB1$ mesurant le potentiel (figure 3.4). Les signaux correspondants sont de moyenne nulle et leur variance décroît avec la distance au plasma. Pour $r = 35\text{mm}$ et $r = 70\text{mm}$ leurs distributions sont symétriques mais sur-Gaussiennes, tandis que pour $r = 15\text{mm}$ et $r = 20\text{mm}$ elles sont légèrement asymétriques en direction des valeurs négatives du potentiel.

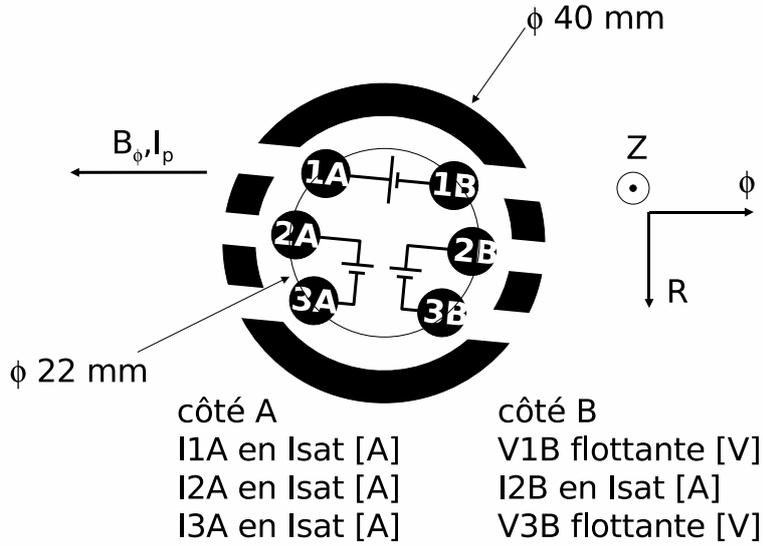


FIG. 3.2 – Vue du dessus schématique de la sonde

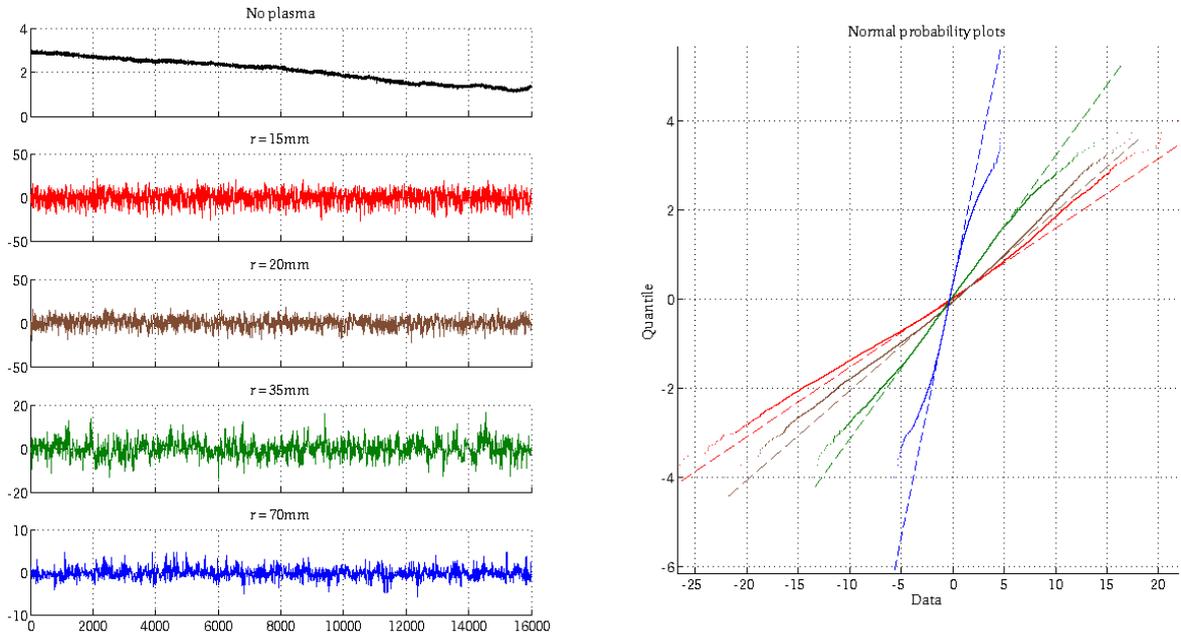


FIG. 3.4 – Signaux d'intensité $VB1$ et leurs graphes quantile-quantile Gaussiens

3.3 Analyses en ondelettes continues

Les transformées en ondelettes de Morlet de tous les signaux à notre dispositions sont représentées pages 7 à 12 de l'annexe. Afin de mieux distinguer les structures aux échelles les plus fines, les coefficients sont multipliés par un facteur $\frac{1}{\sqrt{a}}$ par rapport à la définition (1.1), ce qui correspond à la normalisation dite L^1 .

Nous avons regroupé ici quatre signaux sans plasma sur la figure 3.5, et les signaux de la peloche $IB2$ sur la figure 3.6. Les mesures sans plasma du courant de saturation (a, b et c) sont stationnaires et ne présentent aucune structure à grande échelle. On remarque également que le contenu fréquentiel est différent entre $IA1$ et $IA2$ bien que ces deux peloches soient situés du même côté de la sonde. Les mesures sans plasma du potentiel (d) sont instationnaires. La dérive apparaît dans la transformée en ondelettes sous formes de forts coefficients aux échelles grossières, et d'un défaut de périodicité. La partie haute fréquence est clairement séparée et apparaît comme stationnaire.

Les mesures du courant de saturation en présence de plasma présentent des structures à toutes les

échelles, qui sont de plus en plus prononcées lorsque la sonde est plus éloignée de la LCFS (figure 3.6, a à d). Pour $r = 70mm$ (d), certaines structures sont caractérisées par la présence de grands coefficients d'ondelettes à toutes les échelles. Cet effet est caractéristique des structures cohérentes observées dans les écoulements fluides. Sur la figure 3.7, nous avons représenté les transformées en ondelettes continues des signaux obtenus pour la peloche *IB2* à $r = 35mm$ et $r = 70mm$ après randomisation de la phase des coefficients de Fourier. La randomisation consiste à remplacer la transformée de Fourier $\hat{X}[k]$ du signal par $\hat{Y}[k] = |\hat{X}[k]| \exp(2i\pi U_k)$ où U_k est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0, 1]$. Le signal à phase randomisée est alors la partie réelle de la transformée de Fourier inverse de \hat{Y} . Les transformées en ondelettes de *IB2* après randomisation de la phase présentent beaucoup moins de corrélations entre les échelles que celles qu'on observe sur (c) et (d), figure 3.6.

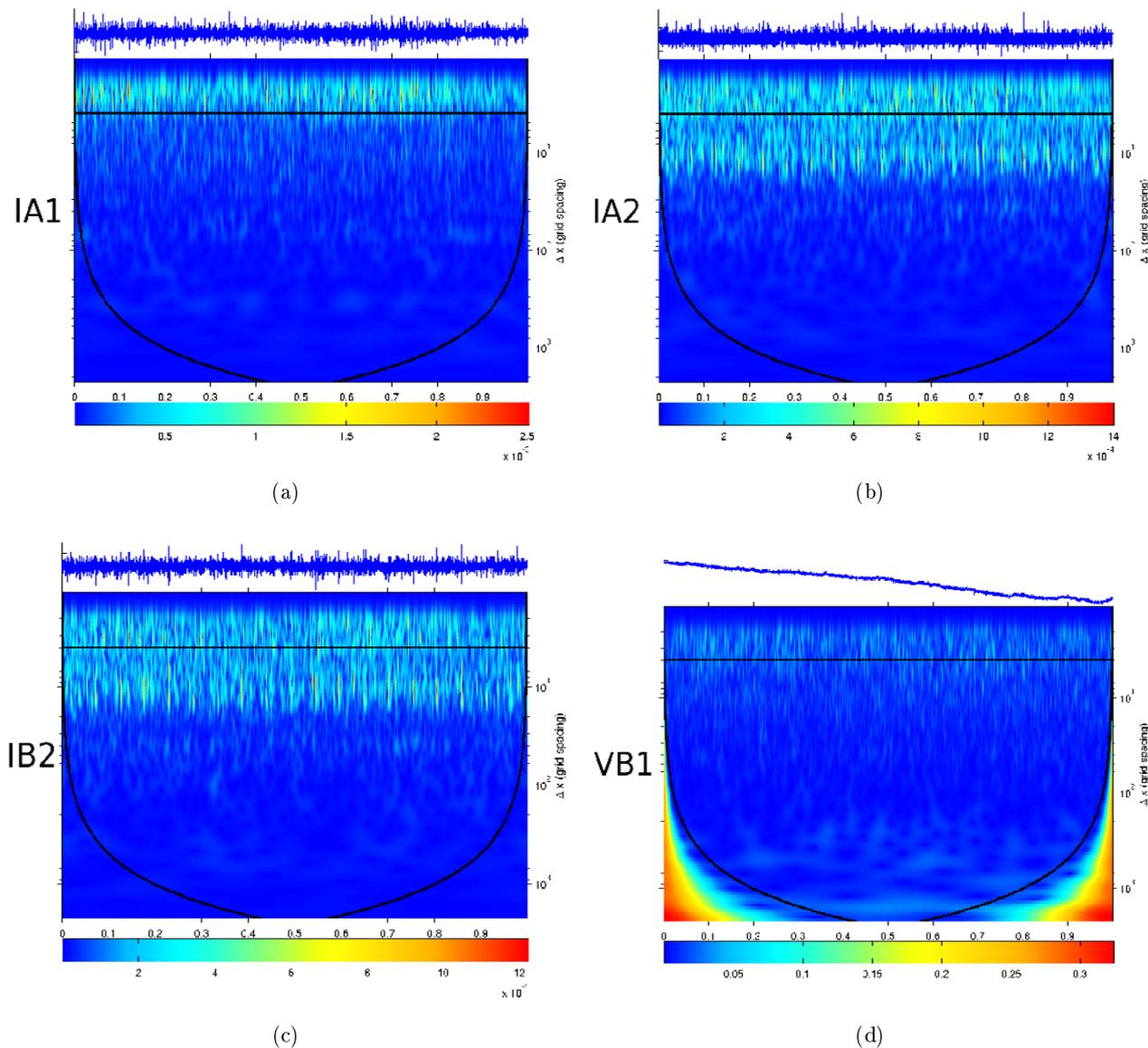


FIG. 3.5 – Transformées en ondelettes continues d’une sélection de signaux sans plasma : *IA1* (a) *IA2* (b) *IB2* (c) *VB1* (d)

Les scalogrammes obtenus à partir des transformées en ondelettes de Morlet pour les peloches *IB2* et *VB2* sont regroupés sur la figure 3.8. Rappelons qu’ils correspondent à la convolution du spectre de l’ondelette avec les spectres de Fourier des signaux, et ne présentent donc pas l’instabilité à haute fréquence caractéristique de ces derniers. Le courant et le potentiel présentent tous deux un comportement en loi de puissance à haute fréquence, respectivement proches de $\nu^{-1.5}$ et ν^{-2} . Ce comportement ne se retrouve pas sur les signaux sans plasma (courbes en noir).

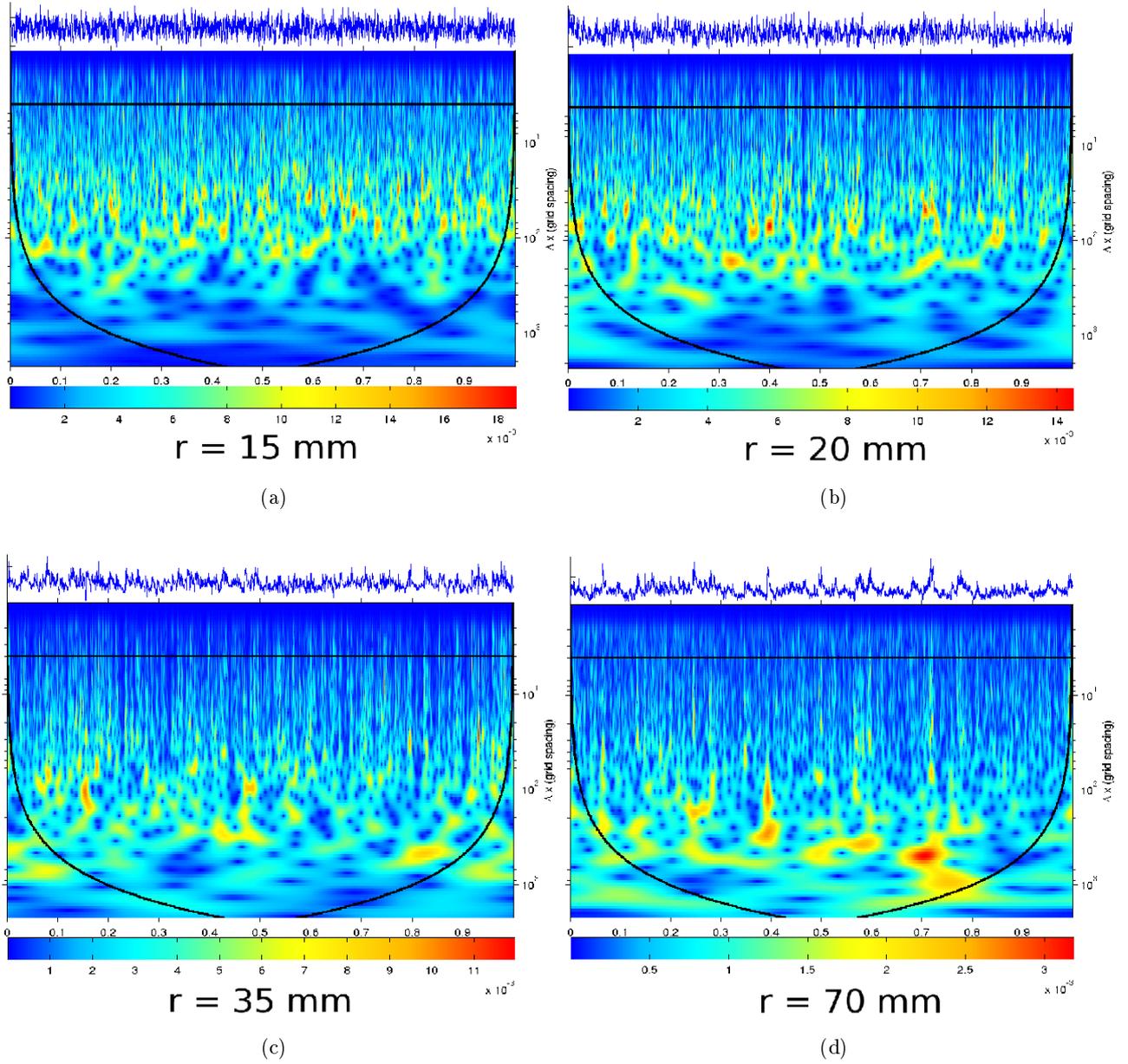


FIG. 3.6 – Transformées en ondelettes continues des signaux de la pelote *IB2* pour les quatre valeurs de r

3.4 Estimation du flux de particules

Nous introduisons ici la quantité

$$\Gamma(t) = IB2(t) \times (VB3(t) - VB1(t))$$

qui peut s'interpréter comme une estimation proportionnelle au flux de particules dans le plan poloidal orthogonalement à la droite joignant les pelotes *VB1* et *VB3*. Nous appellerons désormais Γ le "flux" en oubliant la constante de proportionnalité. Les séries temporelles et les graphes quantile-quantile obtenus pour les quatre valeurs de r sont représentés sur la figure 3.9.

Dans le chapitre 4 nous calculerons la valeur moyenne de Γ et nous verrons que sa dépendance en r n'est pas monotone, comme on peut déjà le deviner sur le graphe quantile-quantile.

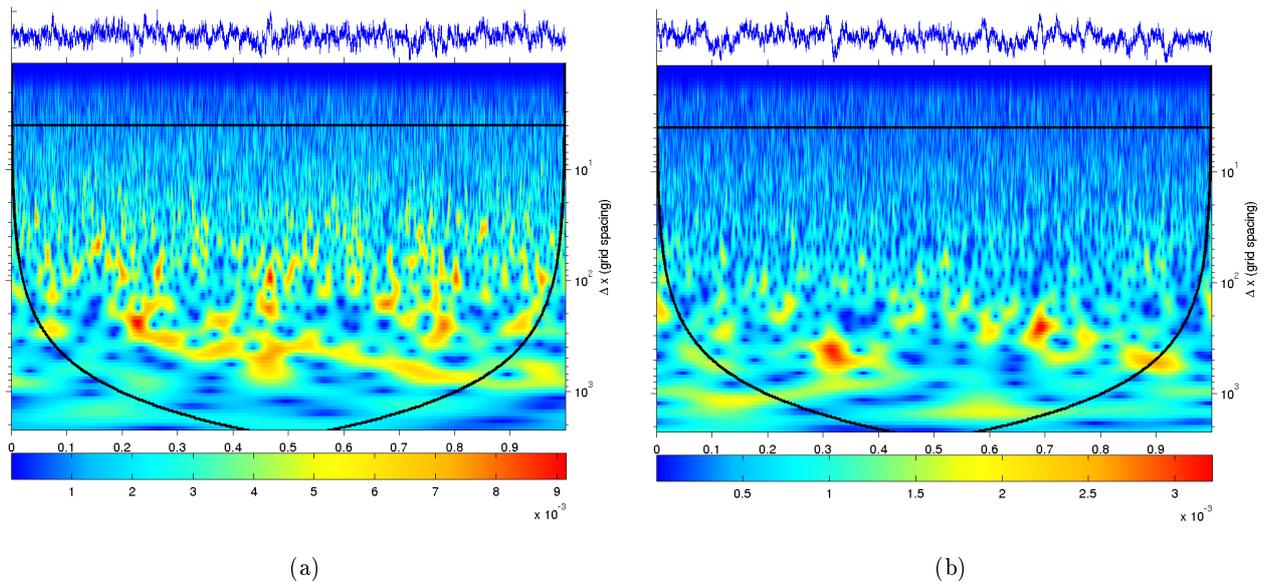


FIG. 3.7 – Transformées en ondelettes continues des signaux de la pelote *IB2* après randomisation de la phase, pour $r = 35\text{mm}$ (a) et $r = 70\text{mm}$ (b).

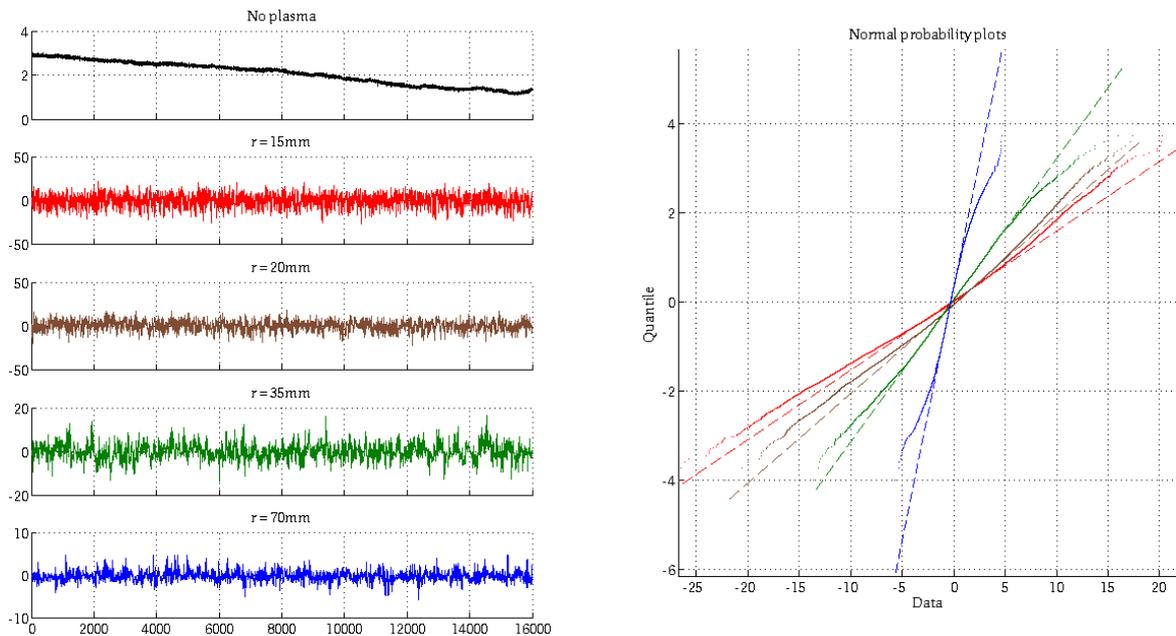


FIG. 3.9 – Séries temporelles du flux Γ et leurs graphes quantile-quantile Gaussiens

3.5 Contenu de l'annexe 1

Les méthodes présentées dans cette partie et illustrées sur quelques exemples ont été appliquées de façon systématique à toutes les données. Les résultats sont regroupés dans l'annexe 1, divisée en quatre parties :

- séries temporelles et graphes quantiles quantiles
- analyses en ondelettes continues
- scalogrammes
- propriété du flux Γ

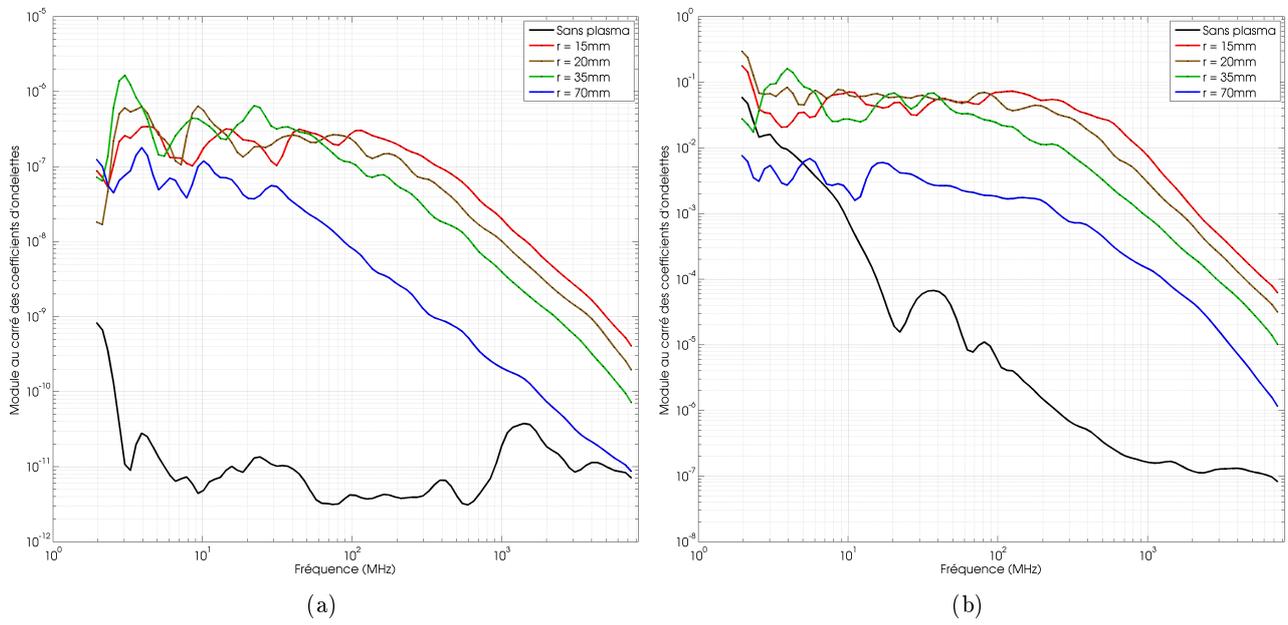


FIG. 3.8 – Scalogrammes des signaux mesurés sur les peloches *IA2* (a) et *VB2* (b)

Chapitre 4

Extraction des structures cohérentes dans des signaux 1D de Tore Supra (tir #35000)

4.1 Du débruitage à l'extraction des structures cohérentes

4.1.1 Extraction dans les signaux de courant de saturation et de potentiel

En principe, on peut utiliser le modèle de bruit additif (2.1) et donc les résultats de la partie précédente pour décrire tout signal 1D ou 2D provenant d'une mesure physique. Dans cette partie, nous appliquons la méthode aux signaux de courant de saturation et de potentiel présentés précédemment. Conformément au vocabulaire introduit dans le contexte des écoulements fluides, nous appellerons partie cohérente d'un signal le résultat obtenu après application d'un algorithme de débruitage à ce signal. La différence entre le signal de départ et la partie cohérente sera quant-à elle appelée partie incohérente. Ainsi :

$$\begin{aligned} I(t) &= I_{coherent}(t) + I_{incoherent}(t) \\ V(t) &= V_{coherent}(t) + V_{incoherent}(t) \end{aligned}$$

Nous pensons que cette séparation apporte des informations sur les caractéristiques de la turbulence qui règne dans le plasma dont sont issus les signaux. Par exemple, nous avons observé dans les fluides qu'une forte variance de la partie incohérente est liée à un fort taux de turbulence. Les coefficients associés à la partie cohérente sont liés à la présence de structures qui, dans le cas des fluides, sont attachées aux maxima de la vorticité c'est-à-dire aux tourbillons. Comme nous ne disposons ici que de signaux unidimensionnels l'interprétation de ces structures est beaucoup plus difficile. Nous verrons d'ailleurs que suivant l'algorithme utilisé le résultat obtenu peut être qualitativement différent.

Afin de tester l'adéquation des signaux expérimentaux avec le modèle sous-jacent que nous avons présenté dans la partie 3, nous serons également amenés à étudier tout au long de cette partie les propriétés statistiques de la partie incohérente, en particulier sa Gaussianité.

Le code couleur sera toujours : **signal total**, **partie cohérente**, **partie incohérente**.

4.1.2 Extraction dans le signal de flux

Comme le flux F est une quantité du second ordre, il requiert un traitement différent. Nous avons :

$$\Gamma(t) = IB2(t) \times (VB3(t) - VB1(t))$$

et d'autre part, les séparations :

$$\begin{aligned} IB2(t) &= IB2_{coherent}(t) + IB2_{incoherent}(t) \\ VB3(t) &= VB3_{coherent}(t) + VB3_{incoherent}(t) \\ VB1(t) &= VB1_{coherent}(t) + VB1_{incoherent}(t) \end{aligned}$$

Il est donc naturel de définir les quatres contributions suivantes au flux :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{CC}(t) &= IB2_{coherent}(t) \times (VB3_{coherent}(t) - VB1_{coherent}(t)) \\
\Gamma_{CI}(t) &= IB2_{coherent}(t) \times (VB3_{incoherent}(t) - VB1_{incoherent}(t)) \\
\Gamma_{IC}(t) &= IB2_{incoherent}(t) \times (VB3_{coherent}(t) - VB1_{coherent}(t)) \\
\Gamma_{II}(t) &= IB2_{incoherent}(t) \times (VB3_{incoherent}(t) - VB1_{incoherent}(t))
\end{aligned}$$

qui mènent à la séparation suivante :

$$F(t) = F_{CC}(t) + F_{CI}(t) + F_{IC}(t) + F_{II}(t)$$

qui s'applique de la même façon à la moyenne temporelle de F . Notons qu'afin d'interpréter physiquement chacun de ces quatre termes, il faudrait revenir à la relation précise entre le courant de saturation et la densité du plasma (respectivement entre le potentiel flottant et la vitesse de dérive ionique). Ici, nous nous bornerons à remarquer que le flux se sépare en un flux purement cohérent F_{CC} , et trois flux incohérents de natures différentes.

4.2 Comportement des algorithmes sur les signaux mesurés en l'absence de plasma

Nous ne considérerons dans ce paragraphe que les signaux de courant de saturation. Une série temporelle typique est représentée sur la figure 4.1, où l'on remarque que les quelques coefficients d'ondelettes (de l'ordre de 0.1%) retenus dans la partie cohérente semblent répartis à une fréquence de l'ordre de 1.2 kHz, et se situent à l'échelle la plus fine. Cependant, le pourcentage de coefficients cohérents est systématiquement inférieur à 1% (tableau 4.1). Ainsi, pour toutes les analyses en présence de plasma, il est probable que le bruit dû à l'appareillage se retrouve dans la partie incohérente, saut peut-être (et il faudra y prendre garde) certains pics à l'échelle la plus fine. Cette situation où un "bruit" au sens expérimental est reconnu comme un signal cohérent par nos algorithmes a malheureusement déjà été rencontrée dans d'autres situations, et il n'y a pas de remède miracle sous les hypothèses que nous nous sommes fixées. En effet, ce comportement est lié au caractère non Gaussien de beaucoup de bruits expérimentaux.

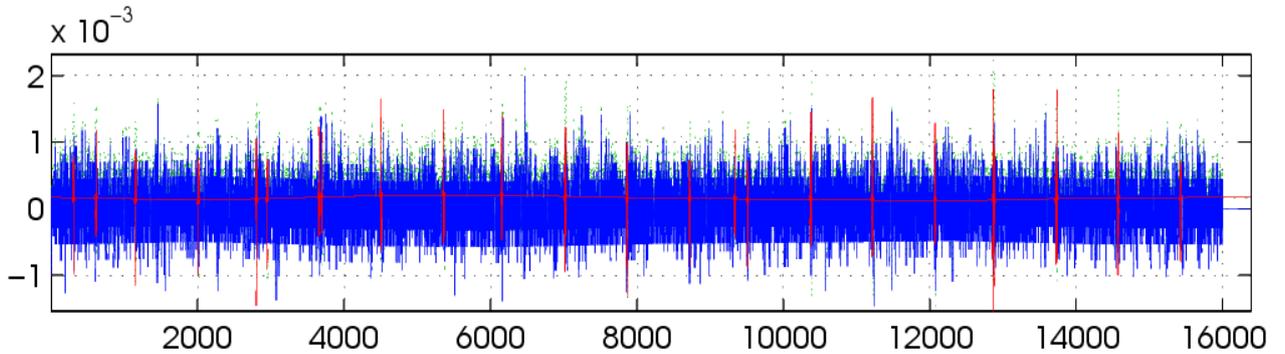


FIG. 4.1 – Résultat typique de l'extraction des structures cohérentes dans un signal mesuré en l'absence de plasma (peloche $IA1$, seuillage global réel)

4.3 Algorithme standard

4.3.1 Gaussianité de la partie incohérente

L'assymétrie de la partie incohérente (tableau 4.2a) est systématiquement inférieure (en valeur absolue) à celle du total. En revanche, son coefficient d'aplatissement (tableau 4.2b) est souvent proche de voire supérieur à celui du total. Ainsi, l'adéquation des signaux avec le modèle de bruit additif blanc Gaussien est loin d'être idéale. En particulier, la figure 4.2 montre que des corrélations de phase subsistent dans les parties incohérentes, et que celles-ci sont responsables du caractère non Gaussien.

		Réel	Complexe	Réel échelle par échelle	Complexe échelle par échelle
Variance cohérente (% du total)	<i>IA1</i>	0.9	0.8	2.3	7.8
	<i>IA2</i>	5.8	6.6	0.5	5.4
	<i>IA3</i>	1.1	1.1	1.4	7.0
	<i>IB2</i>	10.2	10.4	7.8	9.6
Coefficients cohérents (% du total)	<i>IA1</i>	0.1	0.3	0.1	0.6
	<i>IA2</i>	0.2	0.6	0.1	0.4
	<i>IA3</i>	0.1	0.3	0.1	0.5
	<i>IB2</i>	0.3	0.8	0.2	0.7

TAB. 4.1 – Comportement des quatre algorithmes sur les signaux d'intensité mesurés en l'absence de plasma

	$r = 15mm$	$r = 20mm$	$r = 35mm$	$r = 70mm$
<i>IA2</i>	0.61 0.05	0.59 0.18	0.21 0.11	0.51 -0.11
<i>IB2</i>	0.12 0.01	0.26 0.07	0.41 0.31	1.03 0.13
<i>VB1</i>	-0.36 -0.18	-0.33 -0.11	-0.01 -0.05	0.18 0.09

(a)

	$r = 15mm$	$r = 20mm$	$r = 35mm$	$r = 70mm$
<i>IA2</i>	4.5 4.3	3.9 5.0	3.4 5.2	4.0 3.6
<i>IB2</i>	2.7 3.0	3.1 3.5	3.2 4.2	4.9 3.7
<i>VB1</i>	3.1 3.2	3.2 3.3	3.6 3.7	4.8 3.8

(b)

TAB. 4.2 – Coefficients d'asymétrie (a) et d'aplatissement (b) des signaux Tore Supra ainsi que de la partie incohérente obtenue après seuillage global en ondelettes réelles orthogonales (algorithme standard).

4.3.2 Corrélations croisées entre mesures simultanées

Pour un distance r à la LCFS fixée, les signaux correspondant aux six peloches sont enregistrés simultanément. Les corrélations croisées entre ces signaux nous renseignent donc sur les corrélations spatiales du plasma. Dans le cadre de l'extraction des structures cohérentes, les questions suivantes nous intéressent particulièrement :

1. Peut-on interpréter les corrélations croisées entre peloches comme étant dues au passage de structures cohérentes ?
2. Si oui, peut-on utiliser la corrélation croisée entre les parties cohérentes de deux peloches pour en déduire des informations quantitatives sur la propagation de ces structures ?

Nous ne proposerons pas dans ce qui suit de réponse définitive à ces questions. Afin d'illustrer toutefois la problématique liée à la première question nous avons représenté sur les figures 4.3 et 4.4 les fonctions de corrélation entre *IA1* et *IA2* d'une part, et *IA2* et *IB2* d'autre part.

Pour le premier couple de sondes, on observe que la corrélation entre les parties cohérentes est supérieure à la corrélation entre les signaux totaux, tandis que la corrélation entre les parties incohérentes est proche de zéro et non significative. Ainsi, la réponse de l'algorithme standard à la question 1. pour ce couple de sondes est positive : l'intégralité de la corrélation entre *IA2* et *IB2* est due au passage de structures.

Pour les sondes *IA2* et *IB2* la situation est différente, puisqu'on observe un fort pic de corrélation entre les parties incohérentes. Pour $r \leq 35mm$ le maximum de ce pic est même largement supérieur au maximum de la fonction de corrélation entre les parties cohérentes. Le cas le plus intéressant est $r = 70mm$. On remarque en effet sur la fonction de corrélation entre les signaux totaux un maximum très localisé en 0. Or ce petit pic n'apparaît plus sur la fonction de corrélation entre les parties cohérentes. Il semble qu'il soit au contraire dû aux contributions incohérentes. À ce stade, nous ne savons pas si ce pic est lié à l'appareil de mesure ou correspond à une propriété du plasma. Ainsi pour $r = 70mm$,

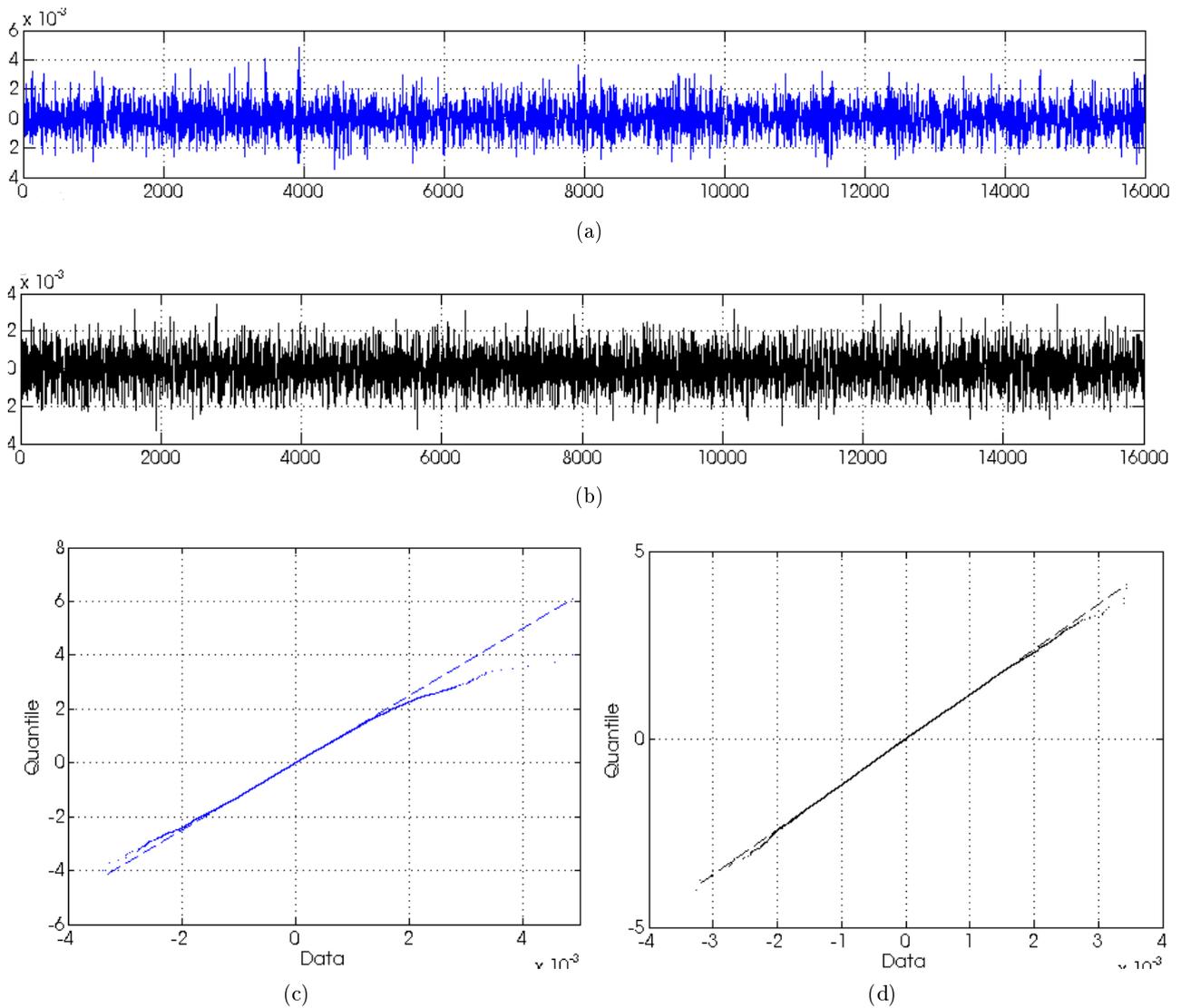


FIG. 4.2 – (a) Série temporelle de la partie incohérente associée à la peloche *IB1* pour $r = 70mm$ par l’algorithme standard. (b) Série temporelle obtenue à partir de (a) par randomisation de la phase des coefficients de Fourier. (c) et (d) Graphes quantile-quantile Gaussien respectifs de (a) et (b).

une partie seulement des corrélations entre *IA2* et *IB2* est due au passage de structures, l’origine de l’autre partie restant indéterminée pour le moment.

4.3.3 Influence de la distance entre la sonde et la LCFS

La figure 4.5 montre que la variance de la partie incohérente décroît systématiquement lorsque la distance r à la LCFS augmentent. Les graphes en coordonnées log-log semblent montrer que cette quantité suit une loi d’échelle en fonction de r . En revanche, la variance de la partie incohérente exprimée en pourcentage (figure et tableau 4.3).

Algorithme	$r = 15mm$	$r = 20mm$	$r = 35mm$	$r = 70mm$
Réel	36%	23%	26%	39%
Réel échelle par échelle	90%	74%	68%	68%
Complexe échelle par échelle	90%	49%	50%	48%

TAB. 4.3 – Influence de la distance à la LFCS sur les résultats de l’extraction en utilisant les coefficients d’ondelettes à valeur réelles

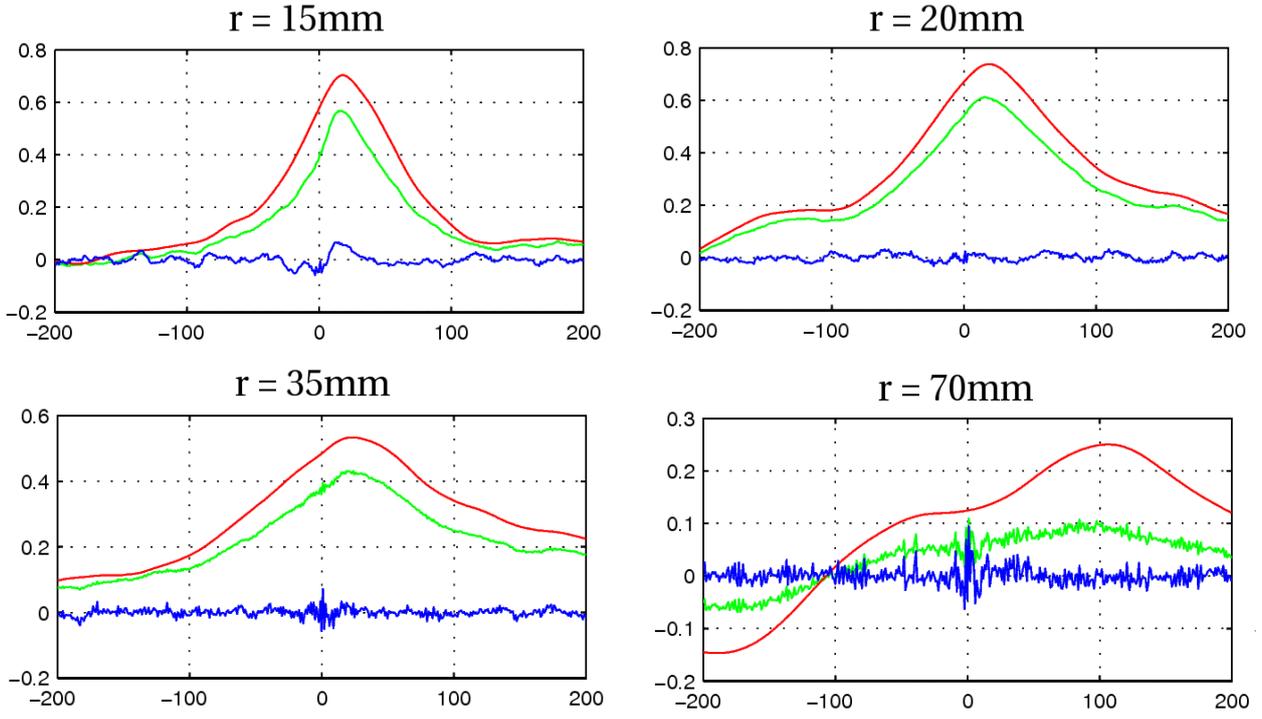


FIG. 4.3 – Fonctions de corrélation croisée entre les signaux totaux et leurs parties cohérentes et incohérentes pour les courants de saturation $IA1$ et $IA2$ (algorithme standard)

4.3.4 Flux

Les quatre contributions au flux moyen sont données dans le tableau 4.4 en fonction de la distance à la LCFS. On peut remarquer que le flux total diminue en valeur absolue lorsque la sonde s'éloigne du plasma, mais que son signe change entre $r = 20mm$ et $r = 35mm$. Dans tous les cas, la contribution cohérente F_{CC} est de même signe et très proche du flux total. Par contre les contributions incohérentes sont presque toutes positives et faibles devant la valeur absolue du flux total.

	F_{CC}	F_{CI}	F_{IC}	F_{II}	F
$r = 15mm$	$3.10 \cdot 10^{-1}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$3.18 \cdot 10^{-3}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-1}$
$r = 20mm$	$3.24 \cdot 10^{-2}$	$1.81 \cdot 10^{-3}$	$1.94 \cdot 10^{-3}$	$1.24 \cdot 10^{-3}$	$3.74 \cdot 10^{-2}$
$r = 35mm$	$-3.43 \cdot 10^{-2}$	$4.16 \cdot 10^{-4}$	$3.91 \cdot 10^{-4}$	$8.90 \cdot 10^{-5}$	$-3.34 \cdot 10^{-2}$
$r = 70mm$	$5.67 \cdot 10^{-3}$	$2.71 \cdot 10^{-5}$	$-9.19 \cdot 10^{-6}$	$3.5 \cdot 10^{-6}$	$5.69 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.4 – Valeurs moyennes du flux et de ses quatre contributions pour la séparation en ondelettes réelles, en fonction de la distance à la LCFS

4.4 Utilisation des ondelettes complexes de Kingsbury

Les ondelettes complexes permettent dans certains cas d'obtenir des parties incohérentes dont les corrélations croisées entre sondes sont plus réduites que pour l'algorithme utilisant les ondelettes orthogonales (figure 4.6). Cependant, leur principal avantage apparaîtra dans le cadre du seuillage échelle par échelle au paragraphe suivant. D'autre part le tableau 4.5 montre bien qu'en passant des ondelettes réelles orthogonales aux ondelettes complexes, le nombre de coefficients conservés par l'algorithme augmente d'un facteur de l'ordre de 4. Si l'on considère la taille mémoire occupée par la partie cohérente (dans la perspective d'une simulation numérique ou de la compression de gros jeux de données), il faut ajouter un facteur 2 parce que les coefficients sont des nombres complexes.

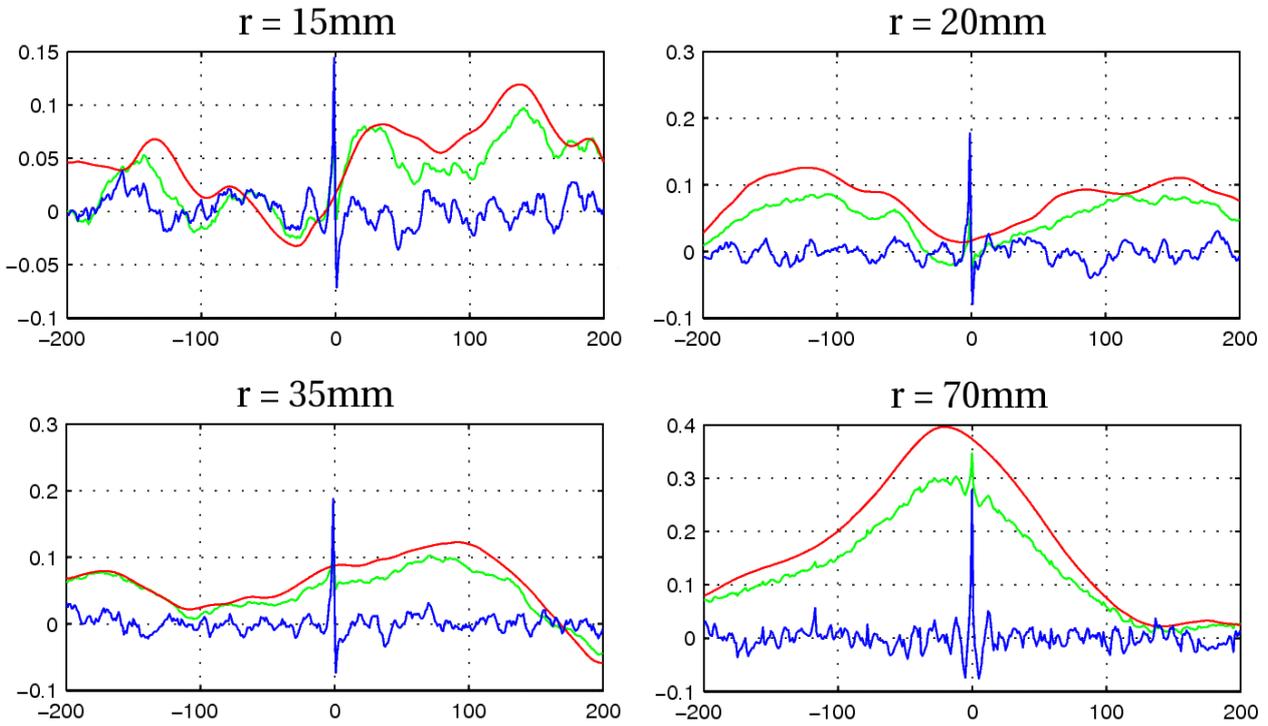


FIG. 4.4 – Fonctions de corrélation croisée entre les signaux totaux et leurs parties cohérentes et incohérentes des courants de saturation $IA2$ et $IB2$ (algorithme standard)

	$IB2$	$IB2$	$VB1$	$VB1$
	$r = 15mm$	$r = 70mm$	$r = 15mm$	$r = 70mm$
Ondelettes réelles orthogonales	1.2%	2.0%	1.0%	1.7%
Ondelettes complexes de Kingsbury	4.4%	4.8%	5.4%	5.0%

TAB. 4.5 – Comparaison des taux de compression du nombre de coefficients

4.5 Utilisation du seuillage échelle par échelle

Comme nous l’avons montré sur les signaux académiques, le succès du seuillage échelle par échelle repose sur des contraintes plus fortes que celui du seuillage global. Or il semble que ces conditions ne soient pas remplies par les signaux de potentiel $VB1$ et $VB3$. En observant qualitativement les résultats des extractions pour ces signaux (cf. Annexe 2), on observe en effet un comportement “tout ou rien” :

- soit le seuil est estimé uniquement pour l’échelle la plus fine et le résultat est proche de celui du seuillage global
- soit la quasi totalité des coefficients sont considérés comme incohérents

Dans la suite de ce paragraphe nous ne considérerons donc que les signaux d’intensité. Nous comparerons les résultats obtenus par les seuillages réel global, réel échelle par échelle et complexe échelle par échelle. Nous prendrons comme exemple la peluche $IA2$ pour $r = 70mm$. Les séries temporelles correspondant aux différents algorithmes sont représentées sur la figure 4.7.

Dans la plupart des cas l’algorithme d’extraction échelle par échelle permet de mettre en évidence une partie incohérente dont les propriétés statistiques s’approchent de celles d’un bruit Gaussien corrélé. Pour le vérifier, on évalue la Gaussianité qualitativement au moyen des graphes quantile-quantile Gaussiens (figure 4.8). Bien que la partie incohérente contienne plus de coefficients d’ondelettes dans le cas du seuillage échelle par échelle (tableau 4.6 (a)), son facteur d’aplatissement est moindre que dans le cas du seuillage global. Ce résultat est surprenant au premier abord. En effet, on pourrait s’attendre à ce que la non-Gaussianité du signal de départ se répercute d’autant plus sur la partie incohérente que

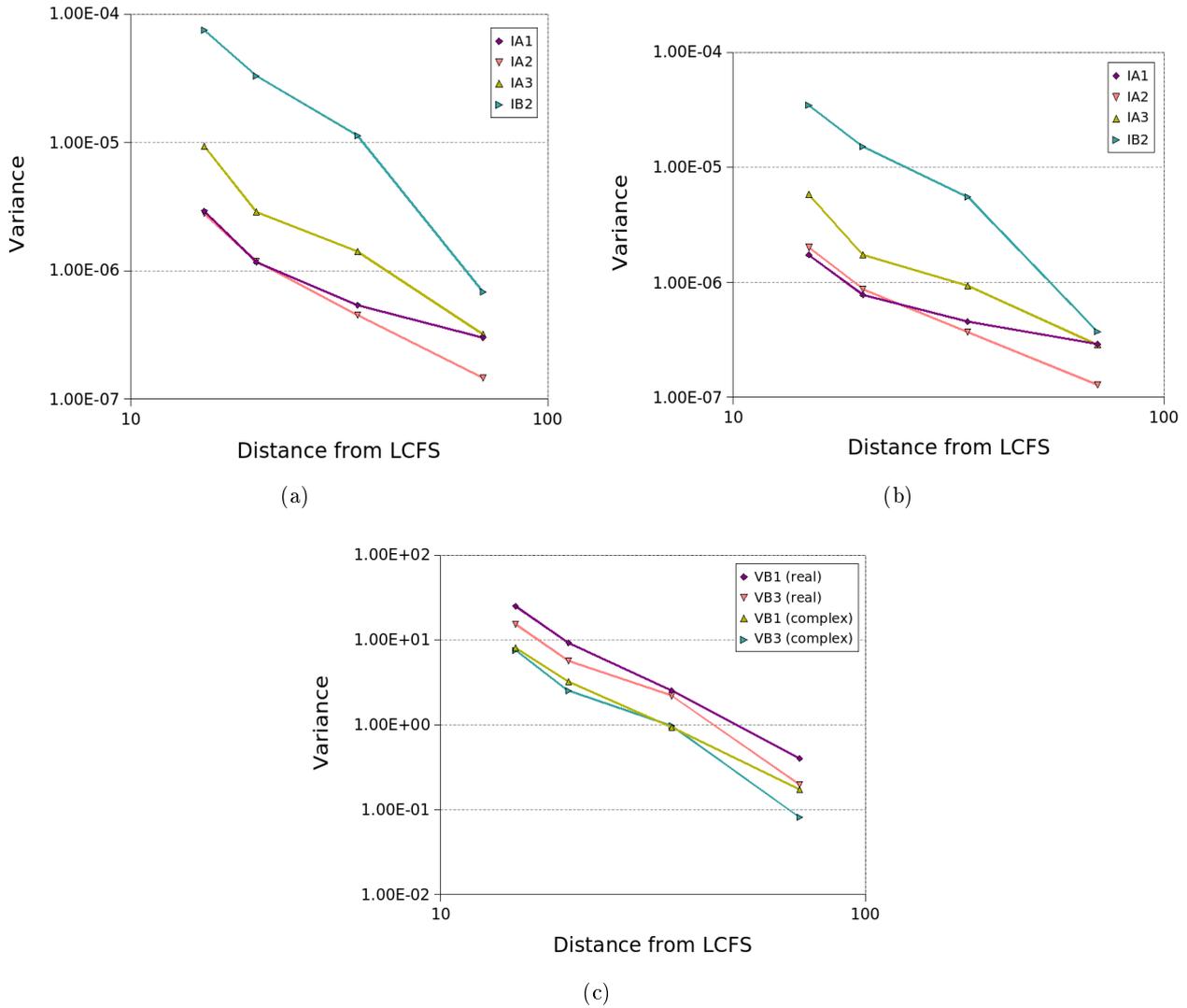


FIG. 4.5 – Variance de la partie incohérente en fonction de la distance entre la sonde et la LCFS. (a) Sondes d'intensité, seuillage global par ondelettes réelles. (b) Sondes d'intensité, seuillage global par ondelettes complexes. (c) Sondes de potentiel

celle-ci contient de coefficients d'ondelettes. Mais ce serait oublier que, si la transformée en ondelettes conserve l'énergie, elle ne conserve pas les moments d'ordre 4.

Un argument un peu technique permet d'interpréter la réduction de l'aplatissement liée à l'extraction échelle par échelle : comme les ondelettes sont normalisées en énergie, ce sont celles des échelles les plus fines qui ont les extrema les plus grands : on dira qu'elles sont "piquées" tandis que les ondelettes grossières sont plus "plates". Or les coefficients d'ondelettes aux échelles les plus fines sont en moyenne plus faibles que ceux des échelles grossières. Ainsi, l'algorithme échelle par échelle a tendance à mettre dans la partie incohérente plus de grands coefficients, associés à des ondelettes plates, et moins de petits coefficients, associés à des ondelettes piquées. Pour une variance donnée, la partie incohérente obtenue comportera donc moins de pics, d'où son facteur d'aplatissement plus faible.

4.6 Contenu de l'annexe 2

Les résultats de toutes les analyses possibles avec les quatre algorithmes qui ont été présentés dans ce rapport sont regroupées de façon synthétique dans l'annexe 2 :

- tableaux de résultats statistiques
- graphiques détaillés concernant chaque signal
- fonctions de corrélations croisées
- étude de la séparation du flux

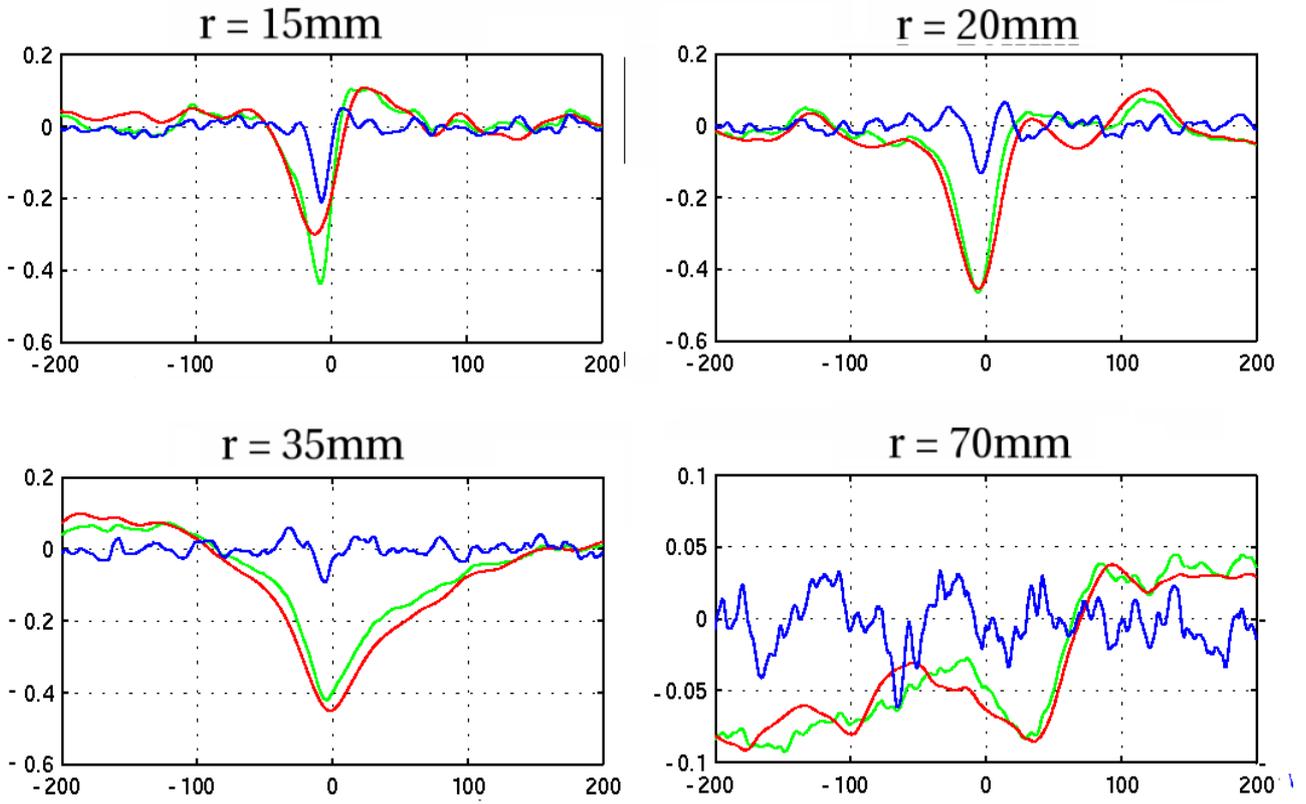
	$r = 15mm$	$r = 20mm$	$r = 35mm$	$r = 70mm$
Réel	1.5	1.6	1.5	1.0
Réel échelle par échelle	0.4	0.7	0.5	0.2
Complexe échelle par échelle	1.1	2.5	1.9	0.9

(a)

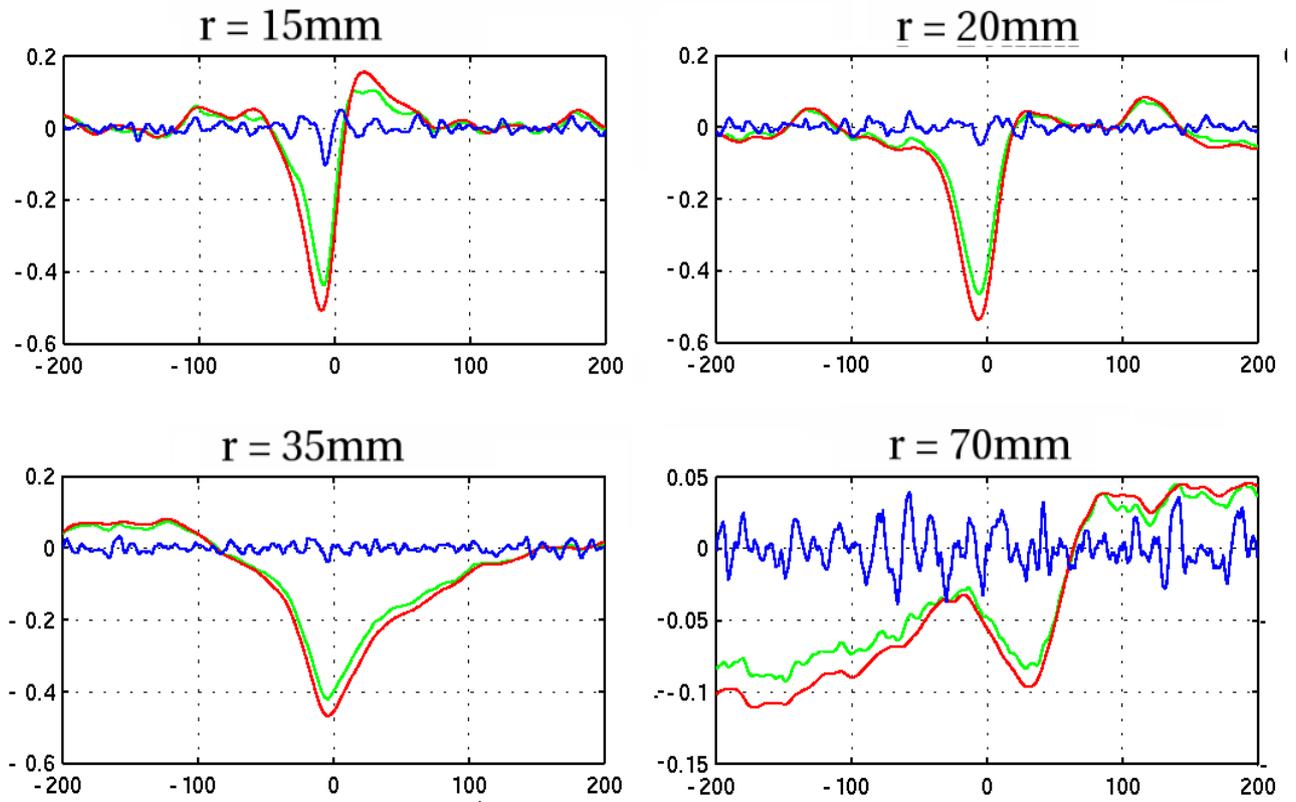
	$r = 15mm$	$r = 20mm$	$r = 35mm$	$r = 70mm$
Signal total	4.5	3.9	3.4	4.0
Réel	4.3	5.0	5.2	3.6
Réel échelle par échelle	3.9	3.6	3.0	3.5
Complexe échelle par échelle	4.2	3.2	3.0	3.3

(b)

TAB. 4.6 – Pour le signal $IA2$ en fonction de l'algorithme utilisé et de la distance à la LCFS : (a) pourcentage de coefficients d'ondelettes de la partie cohérente, (b) aplatissement du signal total et de se partie incohérente.



(a)



(b)

FIG. 4.6 – Corrélations croisées entre les parties **cohérentes** et **incohérentes** du potentiel $VB1$ et du courant de saturation $IB2$, (a) ondelettes réelles orthogonales (b) ondelettes complexes de Kingsbury. Les parties **incohérentes** associées à la transformée en ondelettes complexes présentent moins de corrélations croisées, probablement grâce à l'invariance par translation.

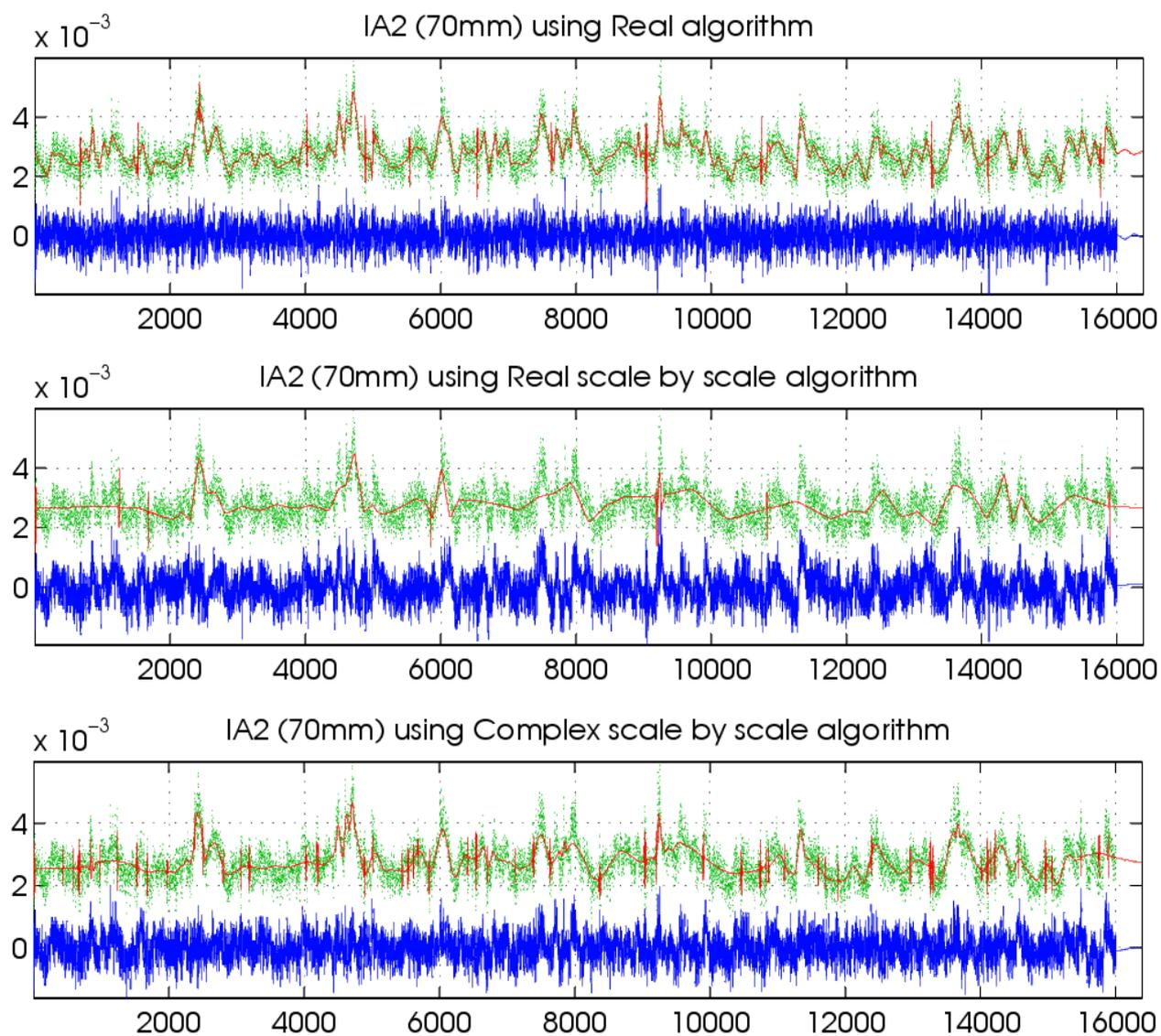


FIG. 4.7 – Comparaison des résultats de l'extraction globale (en haut), de l'extraction échelle par échelle en ondelettes réelles (au milieu) et de l'extraction échelle par échelle en ondelettes complexes (en bas) pour le courant de saturation $IA2$ à $r = 70mm$. Séries temporelles des parties cohérente, incohérente et du total.

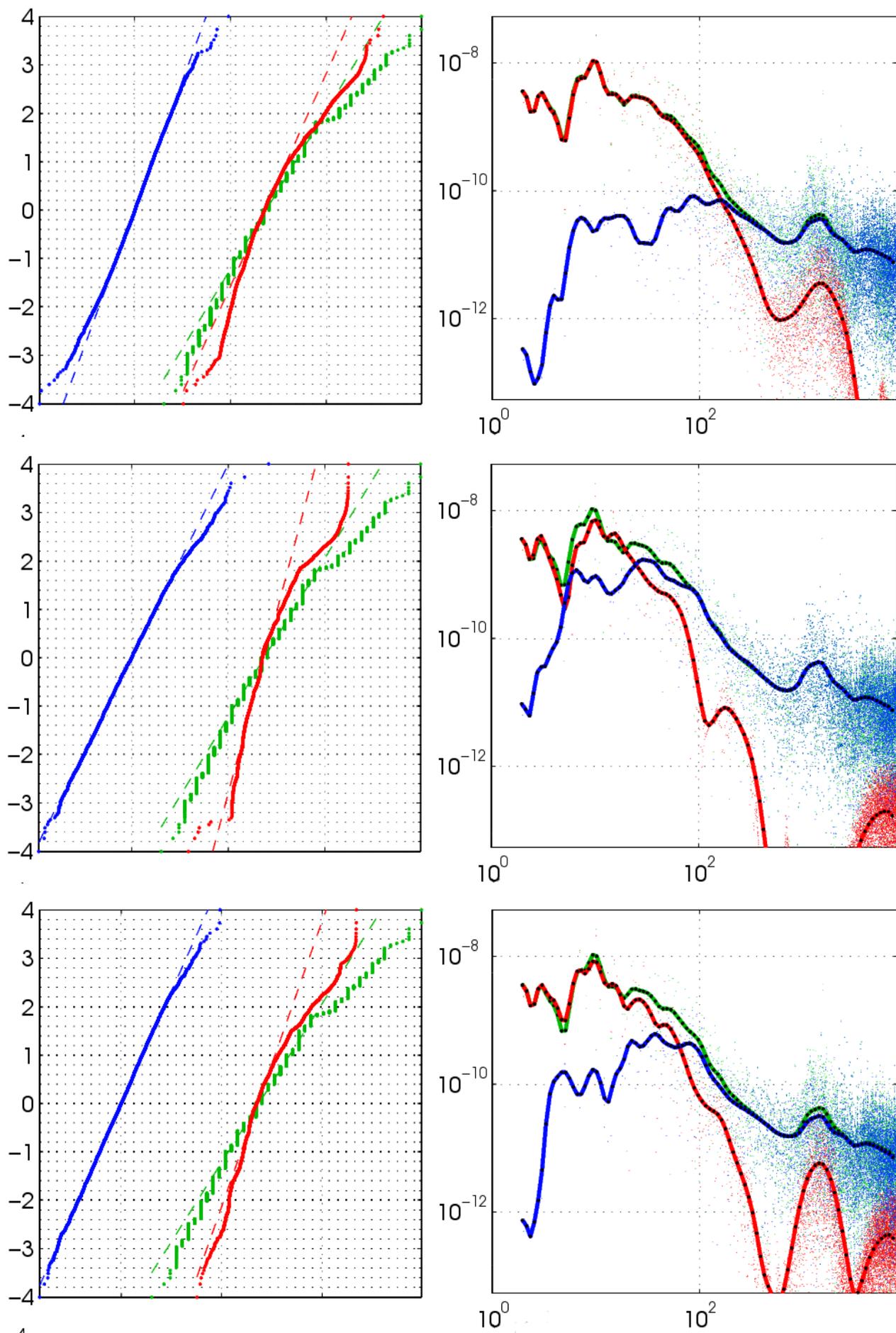


FIG. 4.8 – Comparaison des résultats de l'extraction globale (en haut), de l'extraction échelle par échelle en ondelettes réelles (au milieu) et de l'extraction échelle par échelle en ondelettes complexes (en bas) pour le courant de saturation $IA2$ à $r = 70mm$. Graphes quantile-quantile gaussiens (à gauche) et spectres en ondelettes de Morlet (à droite en lignes pleines).

Chapitre 5

Extraction des structures cohérentes dans des champs turbulents 2D

N'ayant pas encore d'images provenant de la caméra rapide qui sera installée sur Tore Supra, nous allons procéder à une étude détaillée d'un champ de vorticité calculé par simulation numérique directe par Benjamin Kadoch (thésard de Kai Schneider au L3M, Marseille) à la résolution 512×512 .

5.1 Algorithme classique

Avant d'utiliser les nouvelles méthodes que nous avons introduites, passons en revue les résultats obtenus en appliquant l'algorithme standard au champ de vorticité. Tout d'abord, on peut voir (figure 5.1) que la partie cohérente extraite (a) préserve bien tous les tourbillons présents dans le champ de vorticité total (b). Pourtant, elle a été reconstruite en utilisant seulement 0.9% des coefficients d'ondelettes. Le coefficient d'applatissage du champ de vorticité initial était 7.8, tandis que celui de la partie incohérente est de 3.5. Le graphe quantile-quantile Gaussien (5.4a) confirme bien une déviation substantielle à la stricte Gaussianité de la partie incohérente, et montre qu'elle est essentiellement due aux queues de la distribution ($|\omega_I| > 2$).

- En utilisant les autres algorithmes dont nous disposons maintenant, nous allons voir si on peut
- améliorer le taux de compression
 - obtenir une partie incohérente Gaussienne

5.2 Utilisation des ondelettes à valeurs complexes

Nous avons appliqué la méthode d'extraction des structures cohérentes en utilisant les coefficients d'ondelettes complexes. Le nombre de coefficients d'ondelettes retenus dans la partie cohérente est largement supérieur (tableau 5.1) à celui obtenu pour les ondelettes réelles. Cet effet est en grande partie dû au facteur 4 de redondance. En revanche, on observe deux points positifs :

- l'adéquation de la partie incohérente à l'hypothèse de Gaussianité est bien meilleure que dans le cas réel (figure 5.4 b)
- la structure à petite échelle de la partie incohérente préserve un aspect filamentaire (figure 5.2 b) dont on sait qu'il a une importance physique. Cette propriété est due à la directionnalité des ondelettes à valeurs complexes (figure 1.4). Comme les ondelettes à valeurs réelles privilégient les directions verticale et horizontale, les filaments apparaissent brisés sur 5.2 a.

	Compression	Enstrophie	Applatissement
Réel	0.91%	86%	3.5
Complexe	11.2%	91%	3.1

TAB. 5.1 – Diagnostics concernant la partie incohérente (cf. 5.2)

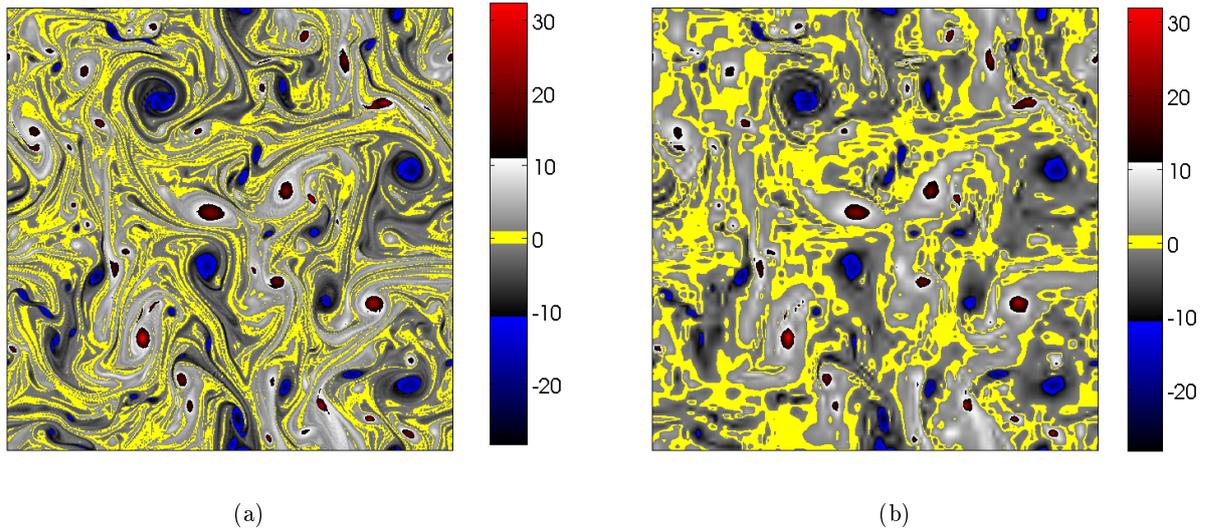


FIG. 5.1 – Champ de vorticité à analyser (a) et partie cohérente obtenue en appliquant l’algorithme standard (b)

5.3 Extraction échelle par échelle

Les spectres des parties incohérentes (figure 5.3) et les structures filamentaires (figure 5.2) attestent de la présence de corrélations. Il est donc naturel de vouloir appliquer l’algorithme échelle par échelle afin de se placer dès le départ sous l’hypothèse d’un bruit corrélé. Étant donné que le spectre du champ de vorticité (figure 5.1c) décroît à peu près en k^{-2} , et d’après la relation (1.25), nous avons pris $q_{max} = 3$. Cependant, nous avons constaté qu’hormis les deux plus fines, toutes les échelles de ce champ de vorticité sont reconnues comme non sporadiques pas l’algorithme itératif (ce qui correspond à $j_{sp} = 8$). Ainsi, on peut dire que l’extraction échelle par échelle ne fonctionne pas pour ce champ de vorticité. Si on interprète le résultat à la lettre sans remettre en cause aucune de nos hypothèses, cela signifie que la partie cohérente de cet écoulement turbulent n’est sporadique qu’aux deux échelles les plus fines. Aux échelles plus grossières, la majorité des coefficients d’ondelettes sont attachés aux structures cohérentes, et notre algorithme ne permet plus d’estimer la variance du bruit.

Comme première vérification qualitative de cette conjecture, nous avons tracé (figure 5.5a) l’histogramme des 128×128 coefficients d’ondelettes réelles du champ de vorticité à l’échelle $j = 7$ dans la direction diagonale, et nous l’avons comparé avec l’histogramme complet des coefficients d’ondelettes (figure 5.5b). Ces deux histogrammes ont des allures très différentes. Pour le premier, la fréquence où l’on observe un coefficient décroît exponentiellement avec son module, tandis que pour le second, elle décroît en raison inverse de son carré, c’est-à-dire beaucoup plus lentement. Il y a donc une moins bonne séparation entre les grands et les petits coefficients au sein d’une échelle donnée que pour les coefficients d’ondelettes dans leur ensemble.

Pour comprendre l’origine du défaut de sporadicité de l’écoulement aux échelles intermédiaires, nous proposons de simuler à nouveau l’écoulement avec des paramètres identiques, mais en augmentant la résolution, par exemple jusqu’à 2048×2048 . Tout en étant dans la même situation physique, nous disposerons ainsi probablement de plus d’échelles sporadiques pour caractériser la partie incohérente.

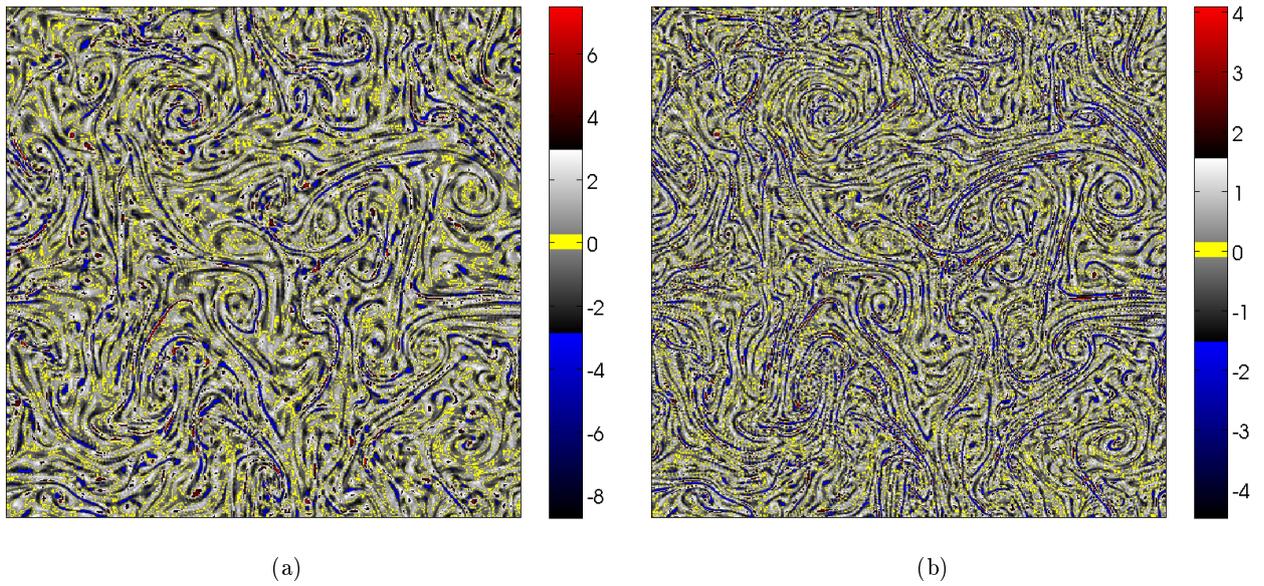


FIG. 5.2 – Partie incohérente obtenue après extraction en ondelettes réelles (a) ou complexes (b). On peut observer sur (b) la présence de filaments à plus petite échelle que sur (a).

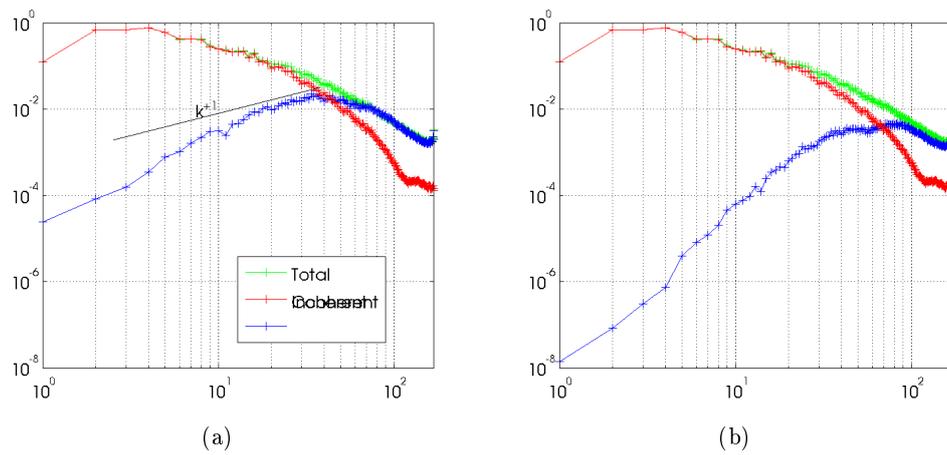


FIG. 5.3 – Spectres des champs obtenus après séparation en utilisant les ondelettes réelles (a) ou complexes (b).

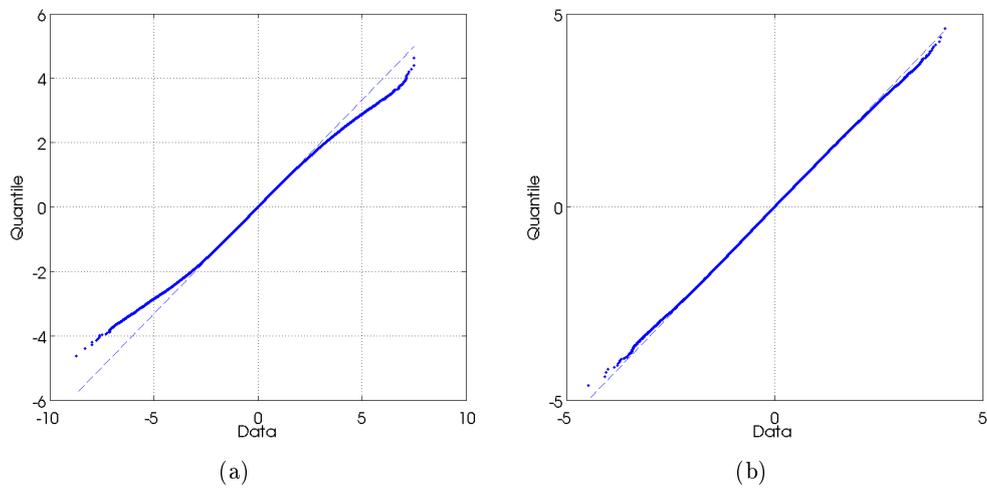


FIG. 5.4 – Graphes quantile-quantile de la partie incohérente après extraction ondelettes réelles (a) ou complexes (b)

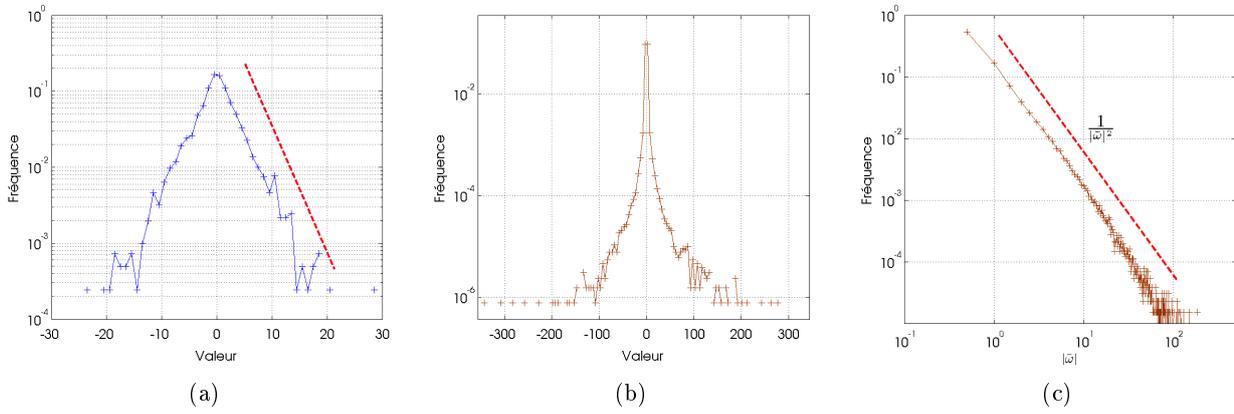


FIG. 5.5 – Histogrammes des coefficients d’ondelettes réels (a) pour l’échelle $j = 7$ dans la direction diagonale et (b) toutes les échelles et toutes les directions confondues. L’ordonnée est en coordonnées logarithmiques. On a également tracé (c) le même graphe que (b) mais en coordonnées log-log, où apparaît la décroissance en $|\tilde{\omega}|^{-2}$

Conclusion

*Nous proposons de discuter de la conclusion de ce rapport lors de la réunion du Vendredi 19
Octobre 2007*

Annexes

Les annexes à ce rapport peuvent être téléchargées sur le site FTP <ftp.lmd.ens.fr>, dans le répertoire `/pub/users/rnguyen`

Bibliographie

- [1] P. Abry, P. Gonçalvès, and P. Flandrin. Wavelet-based spectral analysis of 1/f processes. In *1993 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1993.
- [2] A. Azzalini, M. Farge, and K. Schneider. Nonlinear wavelet thresholding : A recursive method to determine the optimal denoising threshold. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 18(2) :177–185, Oct. 2004.
- [3] M. S. Crouse and R. G. Baraniuk. Fast, Exact synthesis of Gaussian and nonGaussian Long-Range-Dependent Processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, Aug. 1999.
- [4] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer. Painless nonorthogonal expansions. *Journal of Mathematical Physics*, 27(5), May 1986.
- [5] D. Donoho and I. Jonhstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81 :425–455, 1994.
- [6] M. Farge. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 24 :395–457, 1992.
- [7] M. Farge, K. Schneider, and N. Kevlahan. Non-gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptative orthogonal wavelet basis. *Physics of Fluids*, 11(8) :2187–2201, 1999.
- [8] R. F. Fox, I. R. Gatland, R. Roy, and G. Vemuri. Fast, accurate algorithm for numerical simulation of exponentially correlated noise. *Physical review A*, 38(11) :5938, 1 Dec. 1988.
- [9] C. Hennig. Clusters, outliers, and regression : Fixed point clusters. *Journal of Multivariate Analysis*, 86 :183–212, 2003.
- [10] I. Johnstone and B. Silverman. Wavelet treshold estimators for data with correlated noise. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 59 :319–351, 1997.
- [11] N. Kingsbury. The dual-tree complex wavelet transform : A new technique for shift invariance and directional filters. In *Proc. 8th IEEE DSP Workshop*, 1998.
- [12] N. Kingsbury. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 10(3) :234–253, May 2001.
- [13] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Ellipses, 2000.
- [14] B. B. Mandelbrot and J. W. V. Ness. Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, 10(4) :422–437, Oct. 1968.
- [15] K. Schneider and M. Farge. *Wavelets : Mathematical Theory*, 2006.
- [16] B. W. Silverman. Wavelets in statistics : beyond the standard assumptions. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1999.
- [17] Y. Wang. Function estimation via wavelet shrinkage for long memory data. *Annals of statistics*, 24(1) :466–484, 1996.