

# SIMULATION NUMERIQUE DU REGIME THERMOHYDRAULIQUE TRANSITOIRE D'UN JET BIDIMENSIONNEL INJECTE DANS UNE CAVITE RECTANGULAIRE

MARIE FARGE et PIERRE DUHAMEL

Laboratoire de Thermique du Conservatoire National des Arts-et-Métiers,  
292 rue Saint-Martin, 75 141 Paris Cedex 03, France

(Reçu le 15 décembre 1980)

**Résumé**—Un modèle numérique bidimensionnel permet de simuler le comportement transitoire d'un écoulement laminaire dans une cavité rectangulaire avec injection horizontale de fluide chaud à la partie supérieure et extraction à la partie inférieure. On suit l'évolution des champs de vitesse et de température depuis l'instant initial où le fluide est au repos jusqu'à l'établissement du régime permanent. Les équations paraboliques de transport de la vorticité et de l'énergie sont r solv es en utilisant la méthode des directions alternées, tandis que l'équation de Poisson, donnant les valeurs de la fonction courant, est intégrée par la méthode de surrelaxation. Bien que le nombre de Rayleigh caractéristique soit faible, l'évolution du champ dynamique est très différente de celle observée pour le cas isotherme comme le montre une comparaison entre les deux cas.

## NOMENCLATURE

$a$ ,	diffusivité thermique;
$A, B, C, D$ ,	coefficients constants;
$e$ ,	largeur de l'entrée et de la sortie;
$L$ ,	hauteur de la cavité;
$\mathbf{n}$ ,	normale unitaire extérieure;
$Pe$ ,	$u_E L/a$ , nombre de Péclet;
$Pr$ ,	$\nu/a$ , nombre de Prandtl;
$Ra$ ,	$g\beta L^3(T - T_0)/\nu^2$ , nombre de Rayleigh;
$Re$ ,	$u_E L/\nu$ , nombre de Reynolds;
$t$ ,	temps;
$V$ ,	$(u, v)$ , vitesse;
$X$ ,	$(x, y)$ , coordonnées cartésiennes.

## Symboles grecs

$\beta$ ,	coefficient de dilatation volumique;
$\gamma, \Gamma, \delta$ ,	variables muettes;
$\psi$ ,	fonction de courant;
$\nu$ ,	viscosité cinematique;
$\omega$ ,	coefficient de sous-relaxation;
$\Omega$ ,	vorticité.

## Indices inférieurs

$0$ ,	valeur initiale;
$CT$ ,	convection thermique;
$C\Omega$ ,	convection de quantité de mouvement;
$DT$ ,	diffusion thermique;
$D\Omega$ ,	diffusion de quantité de mouvement;
$E$ ,	entrée;
$i, j$ ,	indices spatiaux du maillage;
$inf$ ,	inférieur;
$m$ ,	maille;
$max$ ,	maximum;
$p$ ,	paroi;
$p + 1$ ,	point inférieur au contact avec la paroi;
$sup$ ,	supérieur.

## Indices supérieurs

$'$ ,	variable dimensionnelle;
$n$ ,	indice temporel;
$n + 1/2$ ,	évolution temporelle sur un demi-pas de temps;
$n + 1$ ,	évolution temporelle sur un pas de temps.

## 1. INTRODUCTION

DE NOMBREUX problèmes de mécanique des fluides et de thermique ne peuvent être r solv s à l'aide des méthodes analytiques classiques. Seul le recours à l'ordinateur permet de traiter les systèmes d'équations aux dérivées partielles que l'on rencontre dans ce type de problème. La principale difficulté qui se présente alors est liée à la propriété caractéristique des fluides qui est leur mobilité, et l'on doit veiller à éviter l'apparition d'erreurs et d'instabilités d'origine numérique inhérentes à la discrétisation des termes convectifs. Cet inconvénient reste toutefois contrôlable, à condition de limiter l'étude au seul régime laminaire et de choisir un schéma numérique ainsi que des pas d'espace et de temps adéquats. On a choisi d'étudier l'évolution d'un jet injecté dans une cavité rectangulaire, l'injection se faisant juste en-dessous de la paroi supérieure et l'extraction le long de la paroi inférieure. Cette configuration correspond, par exemple, à un réservoir d'eau chaude ou à la partie inférieure d'un bassin solaire à absorbeur flottant [1, 2]. Voulant limiter la simulation au seul cas du régime laminaire, il s'avère important de connaître le nombre de Reynolds critique de l'écoulement considéré. Plusieurs travaux anciens ont été consacrés à la détermination de ce nombre pour le jet libre bidimensionnel, mais leurs conclusions divergent. D'après certains auteurs le nombre de Reynolds critique (construit sur la largeur

du jet) serait égal à 30 [3–5], d'après d'autres il serait inférieur à cette valeur [6, 7], et quelques-uns enfin le trouvent supérieur [8]. Conscient que le cas étudié ici est sensiblement différent, car il s'agit d'un jet confiné présentant un important frottement pariétal, on retiendra, à défaut de mesures expérimentales plus spécifiques, la valeur 30 comme ordre de grandeur.

Plusieurs auteurs ont déjà étudié le cas du jet à l'aide de méthodes numériques. Ainsi Grant [9] a-t-il résolu les équations du mouvement du jet libre axisymétrique isotherme en utilisant le schéma explicite de Leith. Ensuite Peyret [10] a traité le cas du jet bidimensionnel, injecté dans la partie centrale d'un réservoir thermiquement stratifié ayant une surface libre, à l'aide du schéma implicite de Crank–Nicolson, en se limitant toutefois à l'étude des seuls premiers instants. Oberkampf et Crow [11] ont repris sensiblement le même problème, mais en considérant cette fois l'injection effectuée au niveau de la surface libre; pour la résolution ils emploient la méthode des directions alternées, après avoir discrétisé les termes convectifs dans un schéma aux différences amont, ce qui, compte tenu des vitesses et des maillages utilisés, induit une importante viscosité numérique qui risque alors de masquer les phénomènes physiques. Enfin Cabelli [12] a étudié le cas d'un réservoir de stockage carré, ayant deux entrées d'eau chaude, verticales ou horizontales, et deux sorties situées sur la paroi opposée; il emploie la méthode des directions alternées, avec un schéma aux différences centrées, mais ne s'intéresse qu'au début de l'évolution transitoire.

L'originalité du travail présenté ici tient aux points suivants

(1) Le jet est injecté et extrait très près des parois horizontales, d'où une instabilité importante due au frottement pariétal.

(2) Le fluide est au repos et à une certaine température à l'instant initial, puis le jet est brusquement établi à la vitesse nominale et à une température égale (cas isotherme) ou plus élevée (cas non isotherme), ce qui donne lieu à d'importantes discontinuités, s'accompagnant de forts gradients au niveau de l'entrée et de la sortie.

(3) L'évolution de l'écoulement dans la cavité est étudiée jusqu'à l'établissement du régime permanent, c'est-à-dire sur des temps très longs.

## 2. FORMULATION MATHÉMATIQUE

### 2.1. Hypothèses

La cavité et le jet sont bidimensionnels. Le fluide est newtonien et incompressible. Ses propriétés sont supposées constantes, à l'exception de la densité dans le terme de force d'Archimède qui varie linéairement avec la température (approximation de Boussinesq). L'énergie de dissipation visqueuse est négligeable. On suppose les parois de la cavité adiabatiques avec des conditions d'adhérence.

### 2.2. Equations

La conservation de la masse est exprimée par l'équation de continuité, la conservation de l'énergie par l'équation de la chaleur et la conservation de la quantité de mouvement par les équations de Navier–Stokes, considérées dans un repère cartésien à deux dimensions. La direction de l'axe vertical est opposée à celle de la pesanteur (Fig. 1). Pour les problèmes bidimensionnels il est pratique d'éliminer les termes de pression en introduisant la fonction de courant qui satisfait l'équation de continuité

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \quad v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} \quad (1)$$

De même est introduite la vorticité

$$\Omega' = \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \quad (2)$$

Pour rendre adimensionnelles ces équations on utilise la transformation suivante

$$(x, y) = (x', y')/L \quad (3)$$

$$t = at'/L^2$$

$$T = \frac{T' - T'_0}{T'_E - T'_0}$$

ce qui donne les équations réduites

$$\frac{dT}{dt} = \nabla^2 T \quad (4)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = PrRa \frac{\partial T}{\partial x} + Pr\nabla^2 \Omega \quad (5)$$

$$\Omega = -\nabla^2 \psi. \quad (6)$$

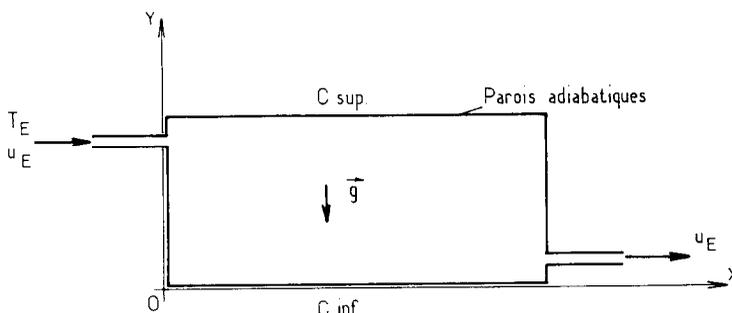


FIG. 1. Système de coordonnées employé.

Ce système d'équations aux dérivées partielles, particulièrement difficiles à intégrer en raison de la non-linéarité des termes convectifs et des couplages entre les équations (4) et (5) ainsi que (5) et (6), ne peut être résolu que numériquement.

2.3. Conditions initiales et aux limites

A l'instant initial le fluide est au repos, à température réduite nulle. On a donc

$$T(t_0) = 0 \tag{7}$$

$$\Omega(t_0) = 0 \tag{8}$$

$$u(t_0) = v(t_0) = 0. \tag{9}$$

Les conditions aux limites thermiques sont déterminées en considérant d'une part l'adiabaticité des parois, on obtient alors la condition de Neumann

$$\left. \frac{\partial T}{\partial u} \right|_p = 0 \tag{10}$$

et d'autre part la température donnée du jet à l'entrée (condition de Dirichlet):

$$T_E = 1. \tag{11}$$

Les conditions aux limites à prendre en compte pour la fonction de courant résultent de l'intégration des équations (1). Utilisant les conditions d'adhérence aux parois et l'uniformité de la répartition des vitesses d'injection et d'extraction, on obtient

$$\psi = 0 \quad \text{sur le contour } C_{sup} \quad (\text{cf. Fig. 1}) \tag{12a}$$

$$\psi = Pe_E e \quad \text{sur le contour } C_{inf} \quad (\text{cf. Fig. 1}) \tag{12b}$$

$$\psi_E = Pe_E (y - y_E) \quad \text{à l'entrée} \tag{12c}$$

$$\psi_s = Pe_E (y - y_s) \quad \text{à la sortie.} \tag{12d}$$

Sur le plan mathématique, l'association des conditions (7), (9)–(12) avec l'équation de convection (4), de type parabolique, et avec l'équation de la fonction de courant (6), de type elliptique, conduit à un problème, en général, bien posé. En effet, l'équation parabolique possède une condition initiale et des conditions aux limites (de Neumann et de Dirichlet), tandis que l'équation elliptique est associée à des conditions de Dirichlet sur un contour fermé.

Par contre pour le champ de vorticité, les conditions aux limites ne sont pas rigoureusement connues. Cette lacune, spécifique au traitement en  $\Omega$   $\psi$ , est due au fait que la vorticité, cr e e par l'adhérence pariétale, dépend également du champ de vitesse au voisinage des parois. La vorticité est donc évaluée à l'aide d'un développement de Taylor de la fonction de courant au voisinage de la paroi [13]. Il n'est alors pas certain que le problème en  $\Omega$  soit bien posé, au sens mathématique, puisque ne sont pas associées à l'équation du mouvement (5), de type parabolique, des conditions aux limites classiques de Dirichlet ou de Neumann. De plus, si l'on note que, pour des vitesses d'injection

 lev es, les termes de diffusion de l'équation de convection et de celle du mouvement peuvent localement devenir négligeables devant les termes de transport, leur conférant ainsi une tendance hyperbolique incompatible avec les conditions de Neumann, on mesure toute la difficulté qu'il y a, dans le cadre des mathématiques connues, à garantir l'existence et l'unicité des solutions. Cette dernière remarque va dans le sens d'une limitation de notre étude au seul cas de faibles nombres de Reynolds.

3. RESOLUTION NUMERIQUE

La discrétisation est obtenue par la méthode des différences finies qui se prête aisément à la forme de laavit  que l'on considère ici.

3.1. Equations paraboliques

Les formes discrètes des équations (4) et (5) sont résolues par la méthode des directions alternées proposée par Peaceman et Rachford [14] et utilisée depuis par de nombreux auteurs [11, 15–17]. Cette méthode est consistante pour les solutions transitoires, ce qui n'est pas le cas des méthodes itératives. Elle reste stable jusqu'à des pas de temps importants, pour lesquels les méthodes explicites divergent, et présente également l'avantage d'aboutir à des systèmes à matrice tridiagonale, et non pentadiagonale comme c'est le cas avec les méthodes implicites pures. Pour résoudre ce système à matrice tridiagonale on emploie une technique dérivée de la méthode d'élimination de Gauss. Le détail du traitement des équations discrètes par la méthode des directions alternées est donné en annexe.

La discrétisation des termes non linéaires de convection joue un rôle déterminant sur la précision et la stabilité du calcul. Préférant sauvegarder une bonne précision au prix d'une stabilité moindre, on a écarté le schéma aux différences amont, qui, pour le cas traité ici, obligerait à prendre des maillages beaucoup trop fins afin de maintenir la viscosité numérique  $u\Delta x/2$  du même ordre de grandeur que la viscosité cinématique. On a donc choisi une discrétisation aux différences centrées dont la précision est meilleure, mais qui présente par contre un risque d'erreurs de phase donnant lieu à des oscillations parasites dans les régions où la fonction subit une brusque variation [18]. La résolution d'un problème évolutif bidimensionnel, discrétisé aux différences centrées, par la méthode des directions alternées donne une précision en  $O(\Delta x^2)$ ,  $O(\Delta y^2)$  et  $O(\Delta t)$ .

D'après l'analyse de Von Neumann [13], la méthode des directions alternées est localement stable pour les problèmes linéaires. La stabilité n'est pas assurée ici car on doit tenir compte de l'incidence des termes non linéaires, ainsi-que des conditions aux limites. En prenant en compte ces dernières, Roux *et al.* [19, 20] ont établi un critère de stabilité pour le problème de transport-diffusion dans uneavit  fermée, discrétisé aux différences centrées et résolu par la méthode des

directions alternées. Toutefois celui-ci n'est pas rigoureusement applicable ici, car on a des conditions aux limites différentes, et en particulier de forts gradients à l'entrée et à la sortie, sources supplémentaires d'instabilité. Il semble préférable, à défaut d'un critère théorique adapté, d'étudier empiriquement la stabilité et la convergence du modèle en faisant varier le pas de temps, afin d'établir sa valeur optimale. Pour le choix du pas d'espace, différents auteurs [13, 17, 21, 22] ont proposé le critère suivant, qui peut s'interpréter comme une comparaison entre les temps de convection et de diffusion (de quantité de mouvement  $t_\Omega$  et de chaleur  $t_T$ ) à l'échelle de la maille [18]

$$Pe_m = \frac{t_{DT}}{t_{CT}} \leq 2 \quad \text{soit } \Delta x \leq \frac{2a}{u_{max}}$$

dans le cas non isotherme si  $Pr \geq 1$  (13a)

$$Re_m = \frac{t_{D\Omega}}{t_{CT}} \leq 2 \quad \text{soit } \Delta x \leq \frac{2\nu}{u_{max}}$$

dans le cas isotherme et dans celui non isotherme si  $Pr < 1$  (13b)

$u_{max} \simeq u_E/10$  étant la vitesse maximale à l'intérieur de la cavité. La valeur 2, donnée ici comme borne supérieure, (et non pas 4 comme c'est le cas habituellement pour les problèmes bidimensionnels) est à considérer en liaison avec la méthode des directions alternées, pour laquelle, à chaque demi-étape temporelle, on est en fait ramené à un problème monodimensionnel [17].

### 3.2. Equation elliptique

Pour résoudre l'équation elliptique (6), discrétisée dans un schéma à cinq points [23], on préfère recourir aux méthodes itératives qui nécessitent moins de place en mémoire que les méthodes directes, au prix toutefois d'un temps de calcul un peu plus long. Parmi celles-ci on choisit la méthode de surrelaxation, et on emploie la formule de Frankel [24] pour calculer le paramètre optimal de surrelaxation. On obtient ainsi une précision en  $O(\Delta x^2)$  et  $O(\Delta y^2)$ .

Cette méthode nécessite une initialisation interne des valeurs de la fonction de courant. Le champ calculé préalablement convient mais n'est pas accessible au tout premier pas de calcul où une initialisation spécifique doit alors être envisagée. Deux techniques ont été comparées. La première, obtenue par intégration des équations (1), en tenant compte des conditions d'adhérence aux parois, donne une fonction de courant nulle dans tout le domaine. La seconde technique consiste à calculer le champ initial en intégrant l'équation de Laplace associée aux conditions aux limites (12), comme si un écoulement de fluide parfait était pré-établi. Cette différence manifeste entre les deux initialisations, due à l'approximation effectuée lors du calcul de la vorticité pariétale, n'influence de façon significative les résultats que jusqu'au quatrième pas de calcul, ce qui reste acceptable compte tenu de la petitesse des pas de temps utilisés.

### 3.3. Conditions aux limites

Comme on l'a vu dans la première partie, la température pariétale est donnée par une condition de Neumann et, au lieu d'utiliser, comme on le fait souvent, des points symétriques par rapport à la paroi, ce qui oblige à recourir à un maillage décalé, on pose tout simplement

$$T_p = T_{p+1} \quad (14)$$

condition au premier ordre, acceptable dans la mesure où l'on néglige la capacité thermique de la maille au contact de la paroi.

Seule la vorticité pariétale (entrée et sortie incluses) pose un problème, car elle ne peut être évaluée que par un développement en série de Taylor de la fonction de courant à la paroi, soit au premier ordre l'algorithme de Thom [25]

$$\Omega_p = \frac{2(\psi_p - \psi_{p+1})}{2\Delta n^2} + O(\Delta n) \quad (15a)$$

ou au second ordre l'algorithme de Woods [26]

$$\Omega_p = \frac{3(\psi_p - \psi_{p+1})}{\Delta n^2} + \frac{\Omega_{p+1}}{2} + O(\Delta n^2). \quad (15b)$$

D'autres algorithmes ont été proposés par Jensen [27], Pearson [28, 29] et Barrett [30]. Une bonne évaluation de la vorticité pariétale est cruciale pour l'issue favorable du calcul en  $\Omega$ , car elle joue un rôle déterminant quant à la stabilité des résultats. Il est donc recommandé de tester plusieurs algorithmes avant d'arrêter son choix, ce qui, dans le cas traité ici, conduit à retenir l'algorithme de Thom, plus stable pour les nombres de Reynolds élevés.

On a pu encore améliorer la stabilité du modèle en compensant le décalage temporel grâce à une sous-relaxation de la vorticité pariétale à chaque demi-étape temporelle, soit

$$\Omega_p^{n+1/2} = \omega \Omega_p^n - (1 - \omega) \Omega_p^{n+1/2} \quad \text{de } n \text{ à } n+1/2 \quad (16a)$$

et

$$\Omega_p^{n+1} = \omega \Omega_p^{n+1/2} - (1 - \omega) \Omega_p^{n+1} \quad \text{de } n+1/2 \text{ à } n+1 \quad (16b)$$

avec  $\omega = 0,6$ .

## 4. APPLICATIONS

### 4.1. Choix des paramètres physiques

Le modèle numérique que l'on vient de présenter a été appliqué à l'étude d'un réservoir d'eau à 60°C ( $Pr = 3,125$ ), l'eau étant injectée, soit à la même température (cas isotherme), soit à une température légèrement plus élevée (cas non isotherme) que celle de l'eau contenue dans le réservoir. On a choisi un bassin de stockage d'allongement 3, et les cotes précisant la position ainsi-que la largeur de l'entrée et de la sortie, sont indiquées sur la Fig. 2. Compte tenu de la limite de stabilité du régime laminaire (se reporter à l'introduction), les vitesses d'injection étudiées restent faibles.

On présentera successivement les cas  $Re_E = 300$  et  $Re_E = 600$  (nombres de Reynolds construits sur la

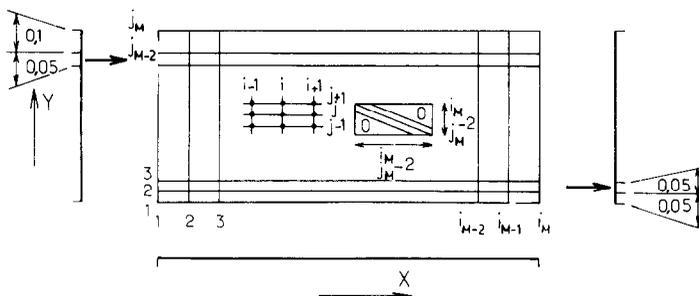


FIG. 2. Maillage employé.

hauteur de la cavité), valeurs qui correspondent à des nombres de Reynolds de jet\* respectivement de 15 et 30. Toutefois dans le cas isotherme, on a pu mener les calculs jusqu'à  $Re_E = 1200$  sans observer d'instabilité de l'écoulement à l'état permanent. Il est donc très probable que, pour l'écoulement étudié ici, le nombre de Reynolds de jet\* critique soit supérieur à 60 dans le cas isotherme.

Pour le cas non isotherme, afin de rester dans les limites de stabilité du schéma numérique, utilisé avec des maillages aussi peu serrés que possible pour limiter le temps de calcul, on choisit  $Ra = 0,3 \cdot 10^6$ , ce qui évidemment correspond à des écarts de température extrêmement faibles.

#### 4.2. Tests

Ce modèle numérique a été testé à partir de résultats publiés par d'autres auteurs, relatifs à des configurations assez voisines de celle étudiée ici. Ainsi a-t-on retrouvé les résultats de Lauriat [31] concernant l'étude de la convection naturelle dans une enceinte carrée dont une des parois verticales est chaude et l'autre froide ( $Pr = 0,7$  et  $Ra = 5000$ ), et ceux de Cabelli [12] décrivant l'écoulement d'un jet chaud injecté dans une cavité carrée contenant de l'eau froide ( $Pr = 2$  et  $Re_E = 100$ ) en négligeant toutefois les forces d'Archimède, soit  $Ra = 0$ . Ces tests sont cependant insuffisants pour garantir la validité du calcul dans la configuration et avec les paramètres physiques propres au problème traité ici. Il a donc été nécessaire de tester la convergence du schéma numérique dans ce cas, ce qui a permis également d'optimiser les valeurs des pas d'espace et de temps.

On a établi, en utilisant le critère mentionné précédemment (13), que les trois premiers cas  $Ra = 0$  et  $Re_E = 300$ ,  $Ra = 0$  et  $Re_E = 600$ ,  $Ra = 0,3 \cdot 10^6$  et  $Re_E = 300$ , doivent être traités dans un maillage  $21 \times 21$ , l'injection se faisant alors sur une seule maille, tandis que le quatrième cas  $Ra = 0,3 \cdot 10^6$  et  $Re_E = 600$  doit être résolu avec un maillage  $41 \times 41$ , l'injection se faisant alors sur deux mailles. On a d'ailleurs vérifié que ce dernier cas, traité en maillage  $21 \times 21$  présentait des instabilités numériques de type 'overshoot', caractérisées par l'apparition de pseudo-sources de chaleur; celles-ci sont dues aux erreurs de

phases inhérentes à la discrétisation aux différences centrées du second ordre ainsi qu'aux erreurs de repliement ('aliasing errors') [18]. La convergence de chaque cas a été évaluée empiriquement en testant une dizaine de valeurs du pas de temps réduit, comprises entre  $0,5 \cdot 10^{-2}$  et  $0,3 \cdot 10^{-5}$ , et ce, à deux instants réduits différents  $t = 0,01$  et  $t = 0,03$ . A titre d'exemple on présente les courbes de convergence pour  $Ra = 0$  et  $Re_E = 600$  (Fig. 3). A l'aide de ces courbes on évalue les pas de temps optimaux, ceux-ci s'allongent progressivement au cours du temps à mesure que l'écoulement se stabilise (Tableau 1). Seul le cas  $Ra = 0,3 \cdot 10^6$  et  $Re_E = 600$ , traité en maillage  $41 \times 41$ , n'a pu faire l'objet d'un test de convergence exhaustif car le coût en aurait été prohibitif. Aussi a-t-on choisi approximativement le pas de temps  $\Delta t = 0,1 \cdot 10^{-5}$  pour l'ensemble du calcul, pas probablement un peu grand pour rendre compte parfaitement des premiers instants, mais tout-à-fait acceptable par la suite.

Les calculs ont été effectués sur un ordinateur IBM 370-168; ils ont demandé en moyenne un temps de calcul par pas de temps de 0,13 s pour le maillage  $21 \times 21$  et 0,30 s pour le maillage  $41 \times 41$ .

#### 4.3. Résultats

Afin de faciliter les comparaisons, les résultats sont présentés aux mêmes instants pour tous les cas traités ici, soit à 6,94 h, 12,16 h, 1,09 jour et 2,10 jours. A chacun de ces instants on donne l'état du champ thermique (sauf dans le premier cas), du champ de vorticité ainsi-que du champ de fonction de courant. Les résultats sont présentés sous forme de lignes de niveau, régulièrement réparties entre deux valeurs (voisines des valeurs extrémales du champ) qui sont précisées sur chacune des figures.

4.3.1. *Cas isotherme.* Pour l'étude du stockage isotherme on considère successivement les résultats obtenus avec  $Ra = 0$ ,  $Re_E = 300$  (Fig. 4) et  $Ra = 0$ ,  $Re_E = 600$  (Fig. 5). Ces deux cas présentent sensiblement la même évolution mais sur des échelles de temps différentes. Ainsi la zone de recirculation apparaît-elle plus tôt pour  $Re_E = 600$  ( $t = 3,47$  h) que pour  $Re_E = 300$  ( $t = 9,55$  h). En revanche l'état permanent est plus lent à s'établir dans le premier cas ( $t = 1,23$  jour) que dans le second ( $t = 1,09$  jour). On remarque également que, plus le nombre de Reynolds est élevé, et plus le

\* Nombre de Reynolds construit sur la largeur de l'entrée.

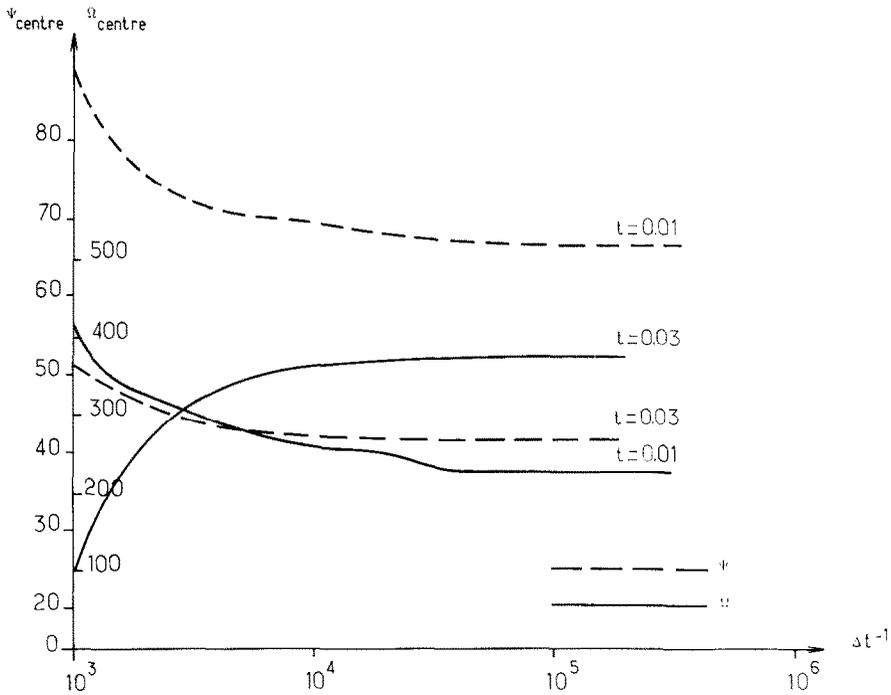


FIG. 3. Courbes de convergence pour le cas  $Ra = 0$ ,  $Re_E = 600$ .

point de recollement est éloigné de la paroi de gauche. Ceci est tout à fait en accord avec les résultats des travaux consacrés à l'étude de la marche [29].

L'étude des lignes d'isovorticité, ou lignes isodines, fournit quelques renseignements complémentaires sur la structure fine de l'écoulement et sur les mécanismes qui y opèrent. En effet, la vorticité étant produite dans les zones à fort gradient transversal de vitesse, de type couche limite, sa valeur nous renseigne sur la localisation, la morphologie et l'importance de celles-ci. Toutefois, faute de relation précise entre la définition d'une couche limite et le profil de vorticité dans cette région, les renseignements obtenus restent entachés d'un certain flou et présentent surtout un intérêt qualitatif.

A partir de l'observation des zones à vorticité élevée, on peut distinguer trois types de couches limites: les couches limites pariétales (indiquées a sur les figures) présentes dans l'écoulement principal, celles (indiquées b) se développant dans les zones de recirculation et celle (indiquée c), dite 'couche limite de jet', formée dans la zone de mélange s'étendant de part et d'autre de la ligne de jet.

Contrairement au cas  $Re_E = 300$ , on remarque pour  $Re_E = 600$  (Fig. 5) la présence d'une ligne isodine fermée au voisinage de la sortie. Ceci laisserait à penser que l'écoulement est plus instable dans cette zone. Cependant, il s'agit plutôt d'une instabilité numérique localisée, due au fait que l'extraction est effectuée sur une seule maille, ce qui revient à imposer un profil de vitesse uniforme, condition qui n'est pas physique. Seul le recours à un maillage plus fin permettrait de pallier cette difficulté.

4.3.2. *Cas non isotherme.* L'évolution de l'écoulement dans le cas du stockage non isotherme est semblable pour  $Ra = 0,3 \cdot 10^6$ ,  $Re_E = 300$  (Fig. 6) et  $Ra = 0,3 \cdot 10^6$ ,  $Re_E = 600$  (Fig. 7) bien que se déroulant sur des échelles de temps différentes et peut se décomposer en trois phases.

(a) Dans la première phase, très brève et non représentée sur les figures, le fluide s'écoule sans recirculation; la contamination par la chaleur reste localisée au voisinage de l'entrée du jet dans la cavité. Cette situation prend fin avec l'apparition d'une tendance à la recirculation qui se manifeste plus tôt

Tableau. 1. Pas de temps optimaux (valeurs réduites)

	$Ra = 0$	$Ra = 0,3 \cdot 10^6$
$Re_E = 300$	0,1.10 <sup>-4</sup> de 0 à 8,68 h 0,5.10 <sup>-4</sup> de 8,68 h à 1,09 jour	0,5.10 <sup>-5</sup> de 0 à 8,68 h 0,1.10 <sup>-4</sup> de 8,68 h à 1,09 jour 0,5.10 <sup>-4</sup> de 1,09 à 24,24 jours
$Re_E = 600$	0,1.10 <sup>-4</sup> de 0 à 8,68 h 0,5.10 <sup>-4</sup> de 8,68 h à 1,23 jour	0,1.10 <sup>-5</sup> de 0 à 2, 1 jour

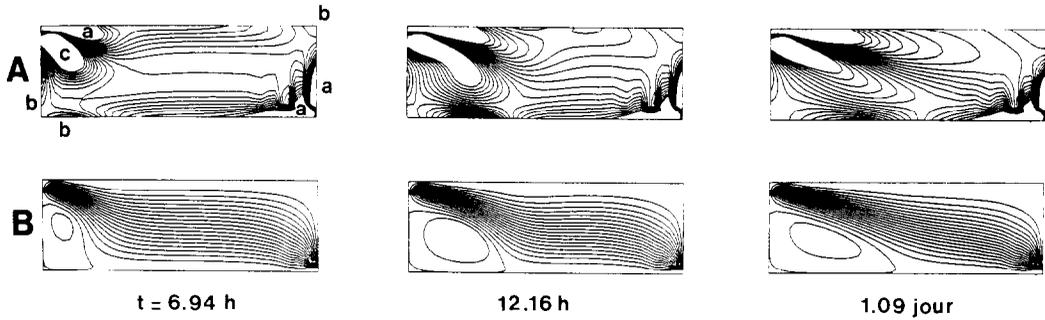


FIG. 4. Cas isotherme.  $Re_F = 300$ . (A) Isodines,  $-360 \leq \Omega \leq 400$  (B) Lignes de courant,  $-0,5 \leq \psi \leq 44,6$ .

pour le cas  $Re_F = 600$  ( $t = 1,7$  h) que pour  $Re_F = 300$  ( $t = 3,7$  h).

(b) La seconde phase est caractérisée par l'étirement de la zone chaude le long de la paroi supérieure; l'écoulement lui-même reste également canalisé dans cette zone où le pincement des lignes de courant traduit l'existence de vitesses horizontales importantes. Ce phénomène de persistance du jet, souvent identifié par le terme 'influence amont', est caractéristique des écoulements stratifiés lents. Corrélativement, la localisation de l'écoulement principal permet à la zone de recirculation de se développer, dans la partie inférieure gauche de la cavité, jusqu'à occuper 89% ( $Re_F = 600$ ) à 93% ( $Re_F = 300$ ) de la longueur du réservoir. L'observation du champ de vorticité complète la description en montrant que la zone à vorticité élevée, attachée à la couche de mélange évolue conjointement avec l'avancée du front thermique jusqu'à occuper les trois quarts de la longueur du bassin. Cette zone se morcelle par endroits, vraisemblablement sous l'action d'importants gradients de vitesse auxquels elle est soumise. Dans le cas  $Re_F = 600$ , on remarque que la déformation des lignes isodines est modulée par la présence de bouffées chaudes qui apparaissent près de l'entrée et sont ensuite transportées par l'écoulement avant de disparaître (à  $t = 13$  h).

(c) La troisième phase correspond au passage du régime d'influence amont vers le régime permanent. Dès que le front chaud atteint la paroi de droite, les lignes isothermes s'épanouissent en forme d'éventail sous l'influence du blocage provoqué par cette paroi, à la fois sur la chaleur (adiabaticité) et sur l'écoulement.

Cet effet, s'opposant à la stratification thermique, entraîne la disparition de la recirculation, à  $t = 1,09$  jour pour  $Re_F = 600$  et à  $t = 1,38$  jour pour  $Re_F = 300$ . Cette résorption rapide donne lieu à un repliement caractéristique (Fig. 6) des lignes de courant, accompagné, pour le seul cas  $Re_F = 600$ , de la brève apparition d'un courant de retour le long de la paroi droite. Le champ thermique continue ensuite à s'homogénéiser par contamination presque unidirectionnelle de la zone inférieure du réservoir. Ainsi voit-on réapparaître, au bout de 24,2 jours pour  $Re_F = 300$  (la température étant alors quasi uniforme) et un peu au delà de 2,1 jours pour  $Re_F = 600$ , la recirculation observée dans le cas isotherme.

4.3.3. Comparaison des régimes dynamiques transitoires. A l'exception des époques extrêmes, le cas non isotherme présente une morphologie et un évolution très différentes de celles observées pour le cas isotherme. Ceci est d'autant plus à souligner que le nombre de Rayleigh étudié n'est pas très élevé.

On retrouve, en régime non isotherme, la phase d'évolution sans recirculation mais sa durée, très raccourcie—elle est divisée par 2 dans le cas  $Re_F = 600$  et par 2,5 dans le cas  $Re_F = 300$ —est devenue négligeable devant la durée du régime transitoire. En effet, l'état dynamique permanent, indépendant du nombre de Rayleigh vue l'adiabaticité des parois, est atteint plus tard quand le jet est chaud; dans le cas  $Re_F = 600$  on est passé de 1,2 jour (en isotherme) à 3,2 jours environ et dans le cas  $Re_F = 300$  de 1,1 à 24,9 jours environ. Cet allongement de durée a pour origine le

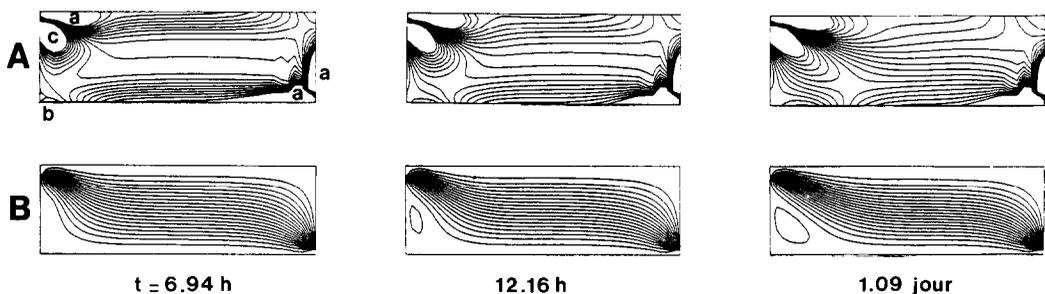


FIG. 5. Cas isotherme.  $Re_F = 600$ . (A) Isodines,  $-900 \leq \Omega \leq 1000$  (B) Lignes de courant,  $-5 \leq \psi \leq 89$ .

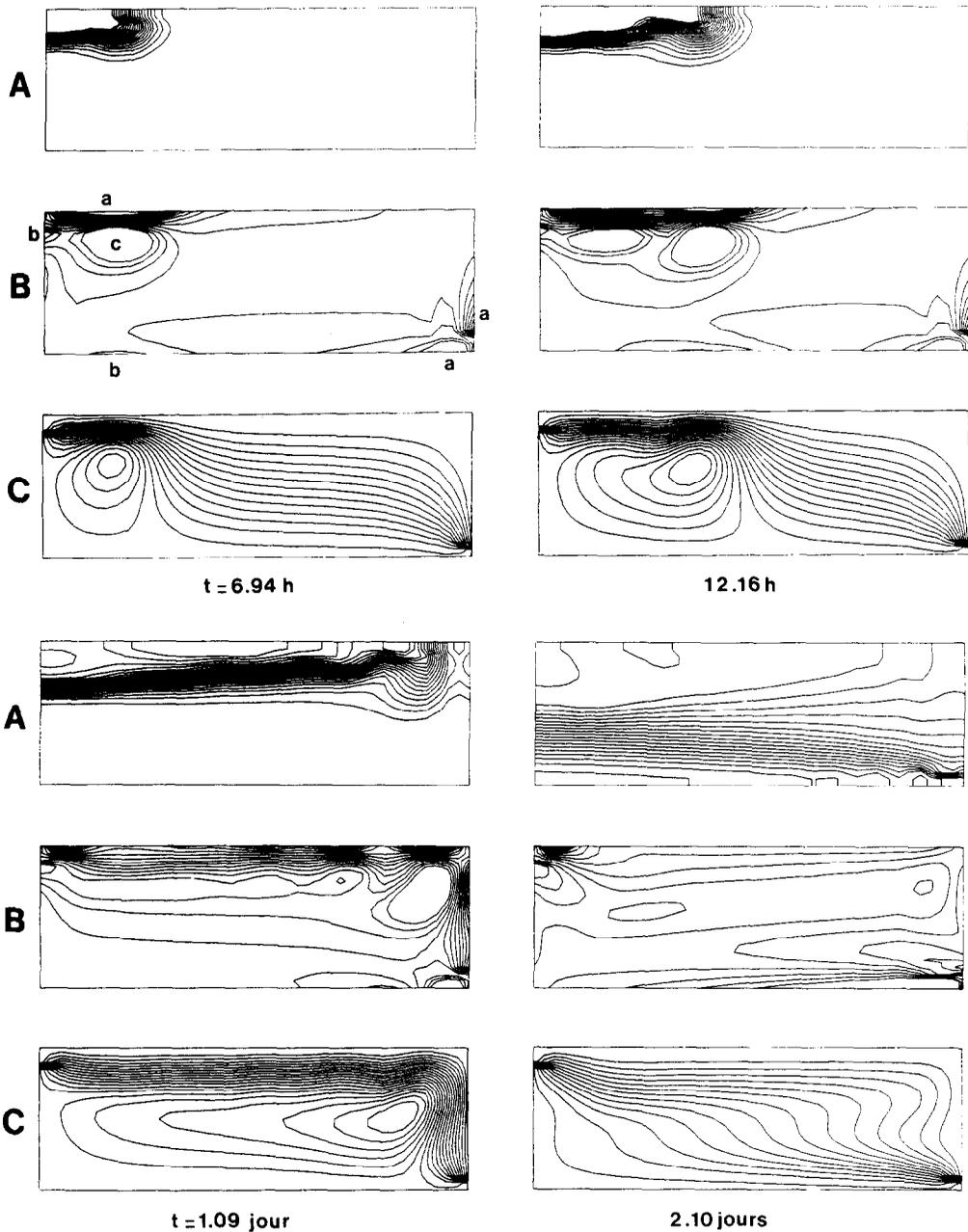


FIG. 6. Cas non isotherme.  $Re_E = 300$ ,  $Ra = 3.10^5$  (A) Isothermes,  $0 \leq T \leq 1$  (B) Isodines,  $-1000 \leq \Omega \leq 5000$  (C) Lignes de courant,  $-20 \leq \psi \leq 47$ .

développement des deux phases intermédiaires propres au cas non isotherme décrites au paragraphe précédent et qui, dans leur ensemble, occupent 63 ( $Re_E = 600$ ) à 96% ( $Re_E = 300$ ) des durées totales d'établissement. On constate que le couplage thermo-hydraulique, essentiellement localisé sur ces deux phases, a un rôle différencié selon la valeur du nombre de Reynolds. Cet effet s'explique en comparant les valeurs du rapport  $Ra/Re_E^2$  qui de 0,83 pour le cas  $Re_E = 600$  passe à 3,33 quand  $Re_E = 300$ . Dans le premier cas cité les forces d'inertie l'emportent sur les autres types d'efforts tandis que dans le second les forces

d'Archimède sont dominantes et leur persistance allonge la troisième phase du régime non isotherme correspondant; cette dernière occupe alors 93% de la durée d'établissement quand  $Re_E = 300$  (pour 42% quand  $Re_E = 600$ ).

On a observé que la fin du régime transitoire non isotherme s'effectue sans réel couplage. En effet, d'une part l'uniformité du champ thermique est quasiment atteinte quand commence à se reformer la recirculation du coin inférieur gauche de la cavité et, d'autre part l'évolution ultérieure vers le régime permanent se fait sur des durées comparables à celles du régime

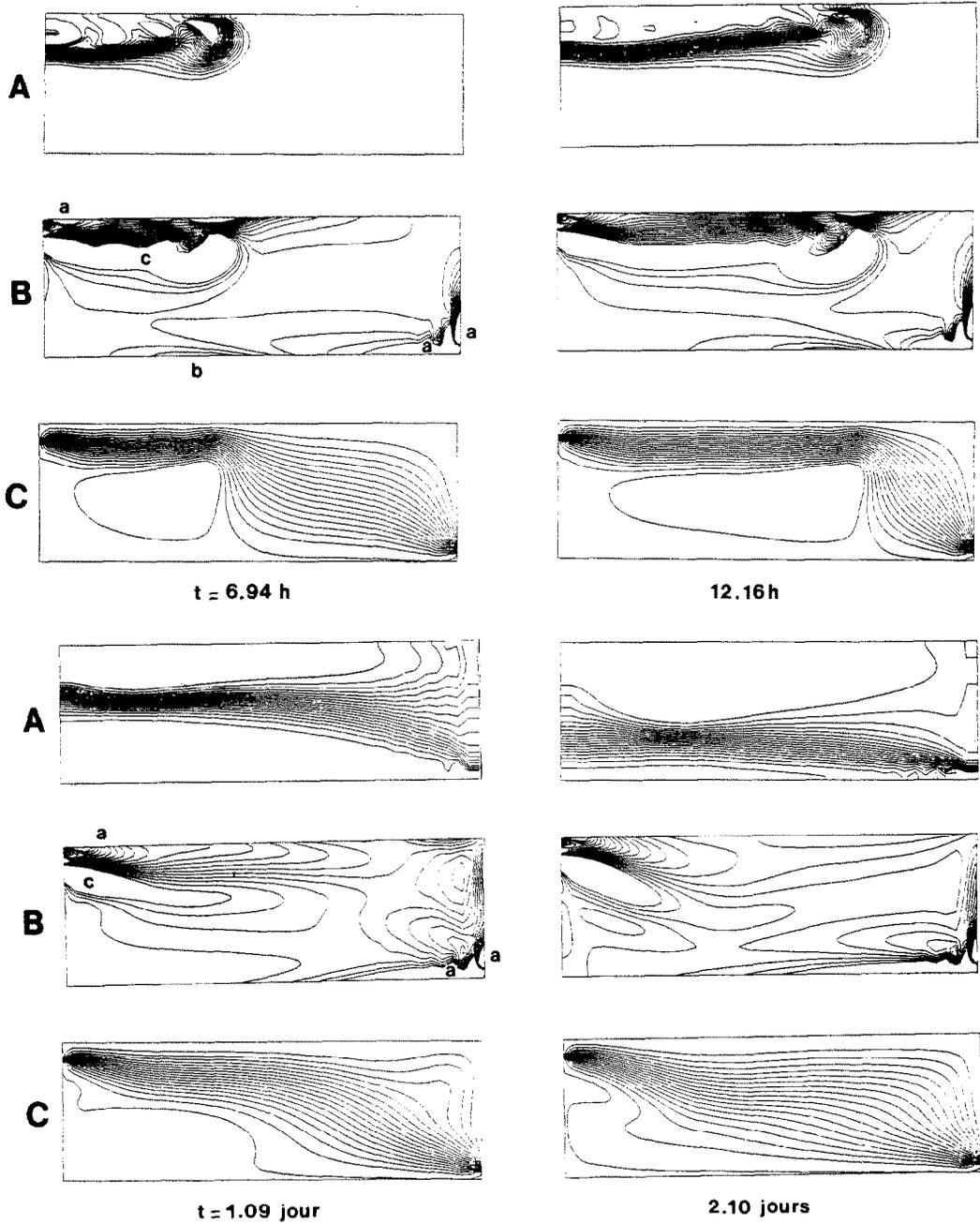


FIG. 7. Cas non isotherme.  $Re_F = 600$ ,  $Ra = 3.10^5$  (A) Isothermes,  $0 \leq T \leq 1$  (B) Isodines,  $-1000 \leq \Omega \leq 5000$  (C) Lignes de courant,  $-5 \leq \psi \leq 100$ .

isotherme. On ne peut cependant pas déduire des observations précédentes que le nombre de Rayleigh n'a qu'une action éphémère sur la dynamique de l'écoulement. On sait qu'il joue un rôle actif sur la stabilité (donc sur le nombre de Reynolds critique): des tests effectués à  $Re_F = 1200$  ont montré qu'il y a convergence des calculs pour  $Ra = 0$  (cf. Section 1) ce qui n'est plus le cas pour  $Ra = 0,3.10^6$ . Ce paramètre est donc capable, par cette action sur la stabilité, de modifier fondamentalement la structure de l'écoulement.

### 5. CONCLUSION

L'état actuel des techniques mathématiques ne permet pas une analyse détaillée des erreurs numériques et de leurs interactions aussi est-il difficile, dans la plupart des cas, de distinguer les instabilités physiques des instabilités numériques et de garantir la précision des résultats. L'approche numérique reste alors limitée à l'étude des régimes assez stables. Le jet étant un écoulement particulièrement instable, les calculs n'ont pu être menés au-delà de  $Re_F = 600$ , valeur bien en deçà

de celles que l'on rencontre habituellement dans les applications technologiques.

La principale conclusion qui se dégage de cette étude est que le couplage entre le champ thermique et le champ dynamique joue un rôle déterminant quant à la structure et à l'évolution de l'écoulement. Ainsi, pour un même nombre de Reynolds obtient-on des morphologies et des échelles de temps très différentes suivant que le régime est isotherme ou non et ceci pour un faible nombre de Rayleigh ( $3.10^5$ ). Tant que l'écoulement reste stable, l'effet de ce nombre est éphémère en ce sens qu'il modifie l'évolution dynamique sur des périodes limitées de durées inférieures à la durée totale d'établissement du régime permanent.

Les modifications transitoires qu'il induit sont cependant remarquables

(a) il provoque un raccourcissement de la phase initiale sans recirculation ;

(b) il induit un régime d' 'influence amont' caractérisé par une forte stratification thermique dans la zone supérieure du réservoir et le développement temporaire d'une grosse recirculation dans la zone inférieure ;

(c) il donne enfin naissance à une troisième phase intermédiaire au cours de laquelle le couplage thermo-hydraulique, fortement dépendant du rapport  $Ra/Re^2$ , va en s'estompant.

Schématiquement tout se passe comme si, à nombre de Reynolds égal, l'augmentation de durée des régimes non isothermes transitoires par rapport aux cas isothermes était due à l'adjonction de deux phases intermédiaires résultant du couplage thermo-hydraulique.

#### REFERENCES

1. M. Farge, Bilan thermique d'un bassin solaire à absorbeur flottant, Centre d'Etudes et de Recherches de l'EDF, Chatou (1977).
2. M. Farge, Solar ponds applications in developing countries, International Conference on Small-scale Energy for Developing Countries, Reading (1979).
3. E. N. Andrade, The velocity distribution in a liquid jet, *Phil. Mag.* **51**, 784–793 (1939).
4. L. C. Tsien and E. N. Andrade, The velocity distribution in a liquid into liquid jet, *Phil. Mag.* **49**, 381–391 (1937).
5. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw Hill, New York (1968).
6. L. N. Howard, Hydrodynamic stability of jet, *J. Math. Phys.* **37**, 283–298 (1959).
7. T. Tatsumi and T. Kakutani, The stability of a two-dimension laminar jet, *J. Fluid Mech.* **4**, 261–275 (1958).
8. T. Schindler, Transition laminaire-turbulent dans les jets, Thèse de Troisième cycle, Université Paris VI (1975).
9. A. J. Grant, A numerical model of instability in axisymmetric jets, *J. Fluid Mech.* **66**, 707–724 (1974).
10. R. Peyret, Unsteady evolution of a horizontal jet in stratified fluid, *J. Fluid Mech.* **78**, 49–63 (1976).
11. W. L. Oberkampf and L. I. Crow, Numerical study of the velocity and temperature fields in a flow-through reservoir, *J. Heat Transfer* **98C**, 353–359 (1976).
12. A. Cabelli, Storage tanks—a numerical experiment, *Sol. Energy* **19**, 45–54 (1977).
13. P. J. Roache, *Computational Fluid Mechanics*. Hermosa, Albuquerque (1972).
14. D. W. Peaceman and M. M. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **3B**, 28–41 (1955).
15. J. O. Wilkes and S. W. Churchill, The finite-difference computation of natural convection in a rectangular enclosure, *Am. Inst. Chem. Engng J.* **12**, 161–166 (1966).
16. K. Aziz and J. D. Hellums, Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection, *Physics Fluids* **10**, 314–324 (1967).
17. K. Küblbeck, G. P. Merker and J. Straub, Advanced numerical computation of two-dimensional time-dependent free convection in cavities, *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, 248–263 (1980).
18. M. Farge, Simulation numérique d'un jet chaud dans une cavité rectangulaire en régime transitoire, Thèse de Troisième Cycle, Université Paris VII (1980).
19. B. Roux, G. Gilly and P. Bontoux, Analysis of the effect of boundary conditions on numerical stability of solutions of Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.* **36**, 417–427 (1979).
20. B. Roux, J. C. Grondin and P. Bontoux, On a high-order accurate method for the numerical study of natural convection in a rectangular cavity, *Numer. Heat Transfer* **1**, 331–342 (1978).
21. J. Fromm, The time dependent flow of an incompressible viscous fluid, *Meth. Comput. Phys.* **3**, 345–382 (1964).
22. J. C. Heinrich, P. S. Huyakorn and O. C. Zienkiewicz, An 'upwind' finite element scheme for two-dimensional convective transport equation, *Int. J. Numer. Meth. Engng* **11**, 131–143 (1977).
23. G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Oxford University Press, Oxford (1974).
24. S. P. Frankel, Convergence rate of iteration treatments of partial differential equations, *Math. Tab., Wash.* **4**, 65–75 (1950).
25. A. Thom, The flow past circular cylinders at low speeds, *Proc. R. Soc.* **A141**, 651–666 (1932).
26. L. C. Woods, A note on the numerical solution of fourth order differential equations, *Aeronaut. Quart.* **5**, 176–183 (1954).
27. V. G. Jensen, Viscous flow around a sphere at low Reynolds numbers, *Proc. R. Soc.* **A249**, 346–366 (1959).
28. C. E. Pearson, A computational method for viscous flow problems, *J. Fluid Mech.* **21**, 611–622 (1965).
29. A. D. Gosman, W. M. Pun, A. K. Runchal, D. B. Spalding and M. Wolfshtein, *Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows*. Academic Press, New York (1969).
30. K. E. Barrett, A variational principle for the stream function-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations incorporating no-slip conditions, *J. Comput. Phys.* **26**, 153–161 (1978).
31. G. Lauriat, Couplage convection naturelle-rayonnement dans un capteur plan à moyenne température, rapport CNRS, ATP Habitat Solaire A.651–2511 (1980).
32. S. Martin and R. R. Long, The slow motion of a flat plate in a viscous stratified fluid, *J. Fluid Mech.* **31**, 669–688 (1968).
33. T. Maxworthy, International Symposium on Stratified Flow, Novossibirsk (1972).
34. Y. H. Pao, Laminar flow of a stably stratified fluid past a flat plate, *J. Fluid Mech.* **34**, 795–808 (1968).
35. W. P. Graebel, On the slow motion of bodies in stratified and rotating fluids, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **22**, 39–54 (1969).

#### ANNEXE

Résolution des équations paraboliques par la méthode des directions alternées

A chaque pas de temps le calcul d'effectue en deux étapes successives :

(1) de  $n$  à  $n + 1/2$  il faut résoudre ( $j_M - 2$ ) de  $i_M$  équations à ( $i_M - 2$ ) inconnues de la forme

$$A_i^n \Gamma_{i+1,j}^{n+1/2} + B_i^n \Gamma_{i,j}^{n+1/2} + C_i^n \Gamma_{i-1,j}^{n+1/2} = D_i^n$$

$\Gamma$  étant une variable muette qui remplace  $T$  dans l'équation

de la chaleur et  $\Omega$  dans l'équation de la vorticité.

(2) de  $n + 1/2$  à  $n + 1$  il faut résoudre  $(i_M - 2)$  systèmes de  $j_M$  équations à  $(j_M - 2)$  inconnues de la forme

$$A_j^n \Gamma_{i,j+1}^{n+1/2} + B_j^n \Gamma_{i,j}^{n+1} + C_j^n \Gamma_{i,j-1}^{n+1} = D_j^{n+1/2}$$

avec les coefficients

$$A_i^n = u_{i,j}^n \delta \frac{\Delta x}{2} - 1$$

$$B_i^n = 2\delta \frac{\Delta x^2}{\Delta t} - 2$$

$$C_i^n = -u_{i,j}^n \delta \frac{\Delta x}{2} - 1$$

$$D_i^n = \Gamma_{i,j-1}^n \left( v_{i,j}^n \delta \frac{\Delta x^2}{2\Delta y} + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) + \Gamma_{i,j}^n \left( 2\delta \frac{\Delta x^2}{\Delta t} - 2 \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right)$$

$$+ \Gamma_{i,j+1}^n \left( -v_{i,j}^n \delta \frac{\Delta x^2}{2\Delta y} + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) + Ra\gamma \frac{\Delta x}{2} (T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1})$$

et

$$A_j^n = v_{i,j}^n \delta \frac{\Delta y}{2} - 1$$

$$B_j^n = 2\delta \frac{\Delta y^2}{\Delta t} - 2$$

$$C_j^n = -v_{i,j}^n \delta \frac{\Delta y}{2} - 1$$

$$D_j^n = \Gamma_{i-1,j}^{n+1/2} \left( u_{i,j}^n \delta \frac{\Delta y^2}{2\Delta x} + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right) + \Gamma_{i,j}^{n+1/2} \left( 2\delta \frac{\Delta y^2}{\Delta t} - 2 \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right)$$

$$+ \Gamma_{i+1,j}^{n+1/2} \left( -u_{i,j}^n \delta \frac{\Delta y^2}{2\Delta x} + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} \right) + Ra\gamma \frac{\Delta y^2}{2\Delta x} (T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1})$$

en prenant

$$\delta = 1 \quad \text{et} \quad \gamma = 0 \quad \text{quand} \quad \Gamma = T$$

$$\delta = \frac{1}{Pr} \quad \text{et} \quad \gamma = 1 \quad \text{quand} \quad \Gamma = \Omega$$

### NUMERICAL STUDY OF THE THERMOHYDRAULIC TRANSIENT REGIME OF A TWO-DIMENSIONAL JET INJECTED INTO A RECTANGULAR CAVITY

**Abstract**—A two-dimensional numerical procedure is used to simulate the time dependent laminar flow in a rectangular cavity. Warm fluid is horizontally injected into the upper part and extracted out of the lower one. The flow evolution is followed from the starting time, where the fluid is at rest, until steady state is reached. The parabolic equations governing energy and vorticity are solved using A.D.I. method, while the elliptic equation giving the stream-function, is computed by overrelaxation. Although the characteristic Rayleigh number is small, the time evolution of the dynamical field is very different from that observed in the isothermal case as shown by a comparison between the two cases.

### NUMERISCHE UNTERSUCHUNG DES THERMOHYDRAULISCHEN ÜBERGANGSGEBIETS EINES ZWEIDIMENSIONALEN STRAHLS, DER IN EINEN RECHTECKIGEN HOHLRAUM INJIZIERT WIRD

**Zusammenfassung**—Zur Simulation der zeitabhängigen Laminarströmung in einem quaderförmigen Hohlraum wird ein zweidimensionales numerisches Verfahren verwendet. Ein warmes Fluid wird horizontal in den oberen Teil injiziert und aus dem unteren Teil wieder abgeführt. Vom Startzeitpunkt, wenn das Fluid noch in Ruhe ist, wird die Entwicklung der Strömung verfolgt, bis wieder ein stationärer Zustand erreicht ist. Die parabolischen Energie- und Wirbeltransportgleichungen werden mit Hilfe der Methode der alternierenden Richtungen gelöst, während die elliptische Stromfunktionsgleichung mittels Überrelaxation berechnet wird. Obwohl die charakteristische Rayleigh-Zahl klein ist, unterscheidet sich die zeitliche Entwicklung des dynamischen Feldes sehr stark von dem, was im isothermen Fall beobachtet wurde. Dies wird durch einen Vergleich der beiden Fälle gezeigt.

### ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОГИДРАВЛИЧЕСКОГО НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СТРУИ, ИНЖЕКТИРУЕМОЙ В ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ПОЛОСТЬ

**Аннотация** — Двумерным численным методом моделируется нестационарное ламинарное течение в прямоугольной полости. Нагретая струя подается горизонтально в верхнюю часть полости и вытекает из ее нижней части. Картина течения прослеживается от начального момента, когда жидкость находится в состоянии покоя, до достижения ею стационарного состояния. С помощью неявного метода переменных направлений решаются параболические уравнения, определяющие перенос энергии и завихренности, а эллиптические уравнения для функции тока решаются методом сверхрелаксации. Сравнение с изотермическим случаем обнаруживает сильное различие в распределении скоростей, несмотря на небольшое характеристическое значение числа Рейля.