

TURBULENCE. — *Effets des ondes d'inertie-gravité sur une turbulence bi-dimensionnelle non forcée en rotation.* Note de **Marie Farge** et **Robert Sadourny**, présentée par Paul Germain.

Les résultats de quatre expériences numériques concernant la turbulence bidimensionnelle non forcée, modélisée par les équations de Saint-Venant, montrent les effets des ondes d'inertie-gravité et de la rotation sur les mécanismes de transfert d'énergie, à savoir: inhibition de la cascade inverse d'énergie rotationnelle par les ondes d'inertie-gravité, blocage des transferts par la rotation, spectre en k^0 pour l'énergie divergente aux échelles petites devant le rayon de déformation.

TURBULENCE. — Inertio-gravity waves effects on a decaying two-dimensional turbulence in rotation.

Four numerical experiments concerning decaying two-dimensional turbulence, modelled by Saint-Venant equations, show the effect of both gravity waves and rotation on the energy transfers, namely: inhibition of the inverse cascade of rotational energy due to gravity waves, transfer blocking due to rotation, k^0 spectrum for divergent energy at scales smaller than the deformation radius.

INTRODUCTION. — Si la turbulence bi-dimensionnelle incompressible a déjà fait l'objet de nombreux travaux (Basdevant [1], Brachet [2], McWilliams [4]), la turbulence bi-dimensionnelle compressible a été beaucoup moins étudiée. Dans ce contexte, Sadourny [7] a prédit une équipartition de l'énergie divergente pour le cas inviscide tronqué, Tanaka [8] a trouvé une inhibition de la cascade inverse d'énergie par les ondes d'inertie-gravité, Farge et Sadourny [3] ont prédit un ralentissement de la cascade inverse d'énergie et une inhibition de la cascade directe d'énstrophie potentielle par la rotation. Les effets de compressibilité étudiés ici sont limités à ceux des ondes d'inertie-gravité provenant de la déformation de la surface libre. Il y a donc, dans le plan horizontal, apparition de divergence et de convergence au sein du champ de vitesse, ce qui caractérise bien le comportement compressible de ce type d'écoulement bi-dimensionnel. Le cas incompressible, c'est-à-dire à divergence nulle, correspondrait à un écoulement à surface libre non déformée. Un tel écoulement, contrairement au cas compressible, ne serait pas sensible à une rotation d'entraînement uniforme. Nous montrerons que, pour un écoulement bi-dimensionnel compressible, la rotation joue un rôle essentiel dans les mécanismes d'échange turbulent, car plus celle-ci est forte et plus les interactions non linéaires sont ralenties.

1. **MODÈLE.** — La dynamique de l'écoulement bi-dimensionnel à surface libre en rotation que nous étudions est décrite par les équations de Saint-Venant:

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (1 + \mathbf{V} \times \mathbf{V}) \mathbf{n} \times \mathbf{V} + \nabla \left(\Phi + \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\Phi \mathbf{V}) = 0.$$

Dans (1), l'unité de temps a été prise égale à l'inverse du paramètre de Coriolis; \mathbf{V} est la vitesse horizontale, \mathbf{n} le vecteur unitaire vertical et $\Phi = gh$ le géopotentiel de la surface libre (h hauteur de la surface, g accélération de la pesanteur), dont la valeur moyenne $\bar{\Phi}$ est égale, avec nos conventions d'unité, au carré du rayon de déformation λ^{-2} . En l'absence de dissipation, l'énergie totale E (potentielle plus cinétique) et l'énstrophie potentielle Σ , respectivement

$$(2) \quad E = \frac{1}{2} \iint (\Phi^2 + \Phi \mathbf{V}^2) dx dy, \quad \Sigma = \frac{1}{2} \iint \frac{(1 + \mathbf{V} \times \mathbf{V})^2}{\Phi} dx dy,$$

sont des invariants, Σ étant associé au transport de la vorticité potentielle $\eta = (1 + \mathbf{V} \times \mathbf{V})/\Phi$; x et y sont les coordonnées spatiales.

Les solutions de (1) peuvent se décomposer sur la base des modes propres des équations linéarisées autour d'un état d'équilibre $\Phi = \bar{\Phi}$ et $\mathbf{V} = \mathbf{0}$

$$(3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + \chi = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} + \Phi - \psi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \lambda^{-2} \nabla^2 \chi = 0,$$

où χ et ψ réfèrent respectivement au potentiel de vitesse et à la fonction de courant. Ces modes propres sont les modes rotationnels, caractérisés par une divergence nulle ($\chi = 0$) et l'équilibre géostrophique ($\Phi = \psi$), et les modes inertio-gravitationnels, caractérisés par un tourbillon potentiel linéarisé nul ($\nabla^2 \psi - \lambda^2 \Phi = 0$), dispersifs avec des fréquences propres $\omega(k) = (1 + k^2/\lambda^2)^{1/2}$ pour les modes d'échelle k^{-1} . Le comportement spectral des solutions peut donc s'analyser par l'intermédiaire des densités spectrales unidimensionnelles d'énergie rotationnelle et inertio-gravitationnelle, respectivement

$$(4) \quad E'_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{|k^2 \psi(k) + \lambda^2 \Phi(k)|^2}{k^2 + \lambda^2} k d\theta,$$

$$(5) \quad E'_{\mathcal{G}}(k) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[|\chi(k)|^2 + \frac{|\psi(k) - \Phi(k)|^2}{1 + k^2/\lambda^2} \right] k^3 d\theta,$$

les relations (4) et (5) ont été intégrées par rapport à l'angle azimuthal θ du vecteur d'onde \mathbf{k} dont k est le module. A (4) correspond bien sûr une densité spectrale d'énstrophie potentielle « linéarisée »

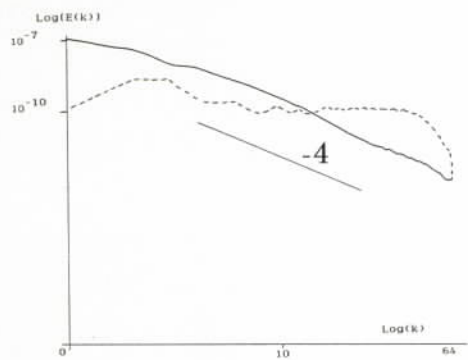
$$(6) \quad \Sigma'_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |k^2 \psi(k) + \lambda^2 \Phi(k)|^2 k d\theta,$$

dont l'analogue $\Sigma'_{\mathcal{G}}$ pour les ondes inertio-gravitationnelles est identiquement nul. Il est important de noter que les quantités globales $E' = E'_{\mathcal{R}} + E'_{\mathcal{G}}$ et $\Sigma' = \Sigma'_{\mathcal{R}}$, intégrées sur tous les nombres d'onde, ne sont pas des invariants exacts du problème, mais simplement des formes approchées des vrais invariants E et Σ , définis par (2), qui, n'étant pas quadratiques, n'ont pas de décomposition spectrale bien définie.

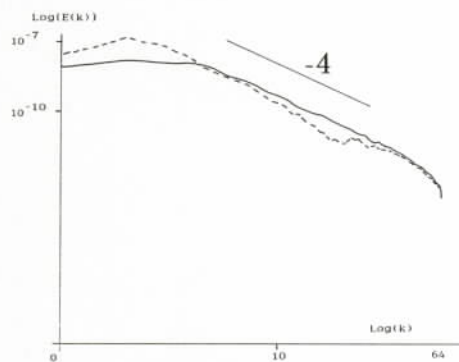
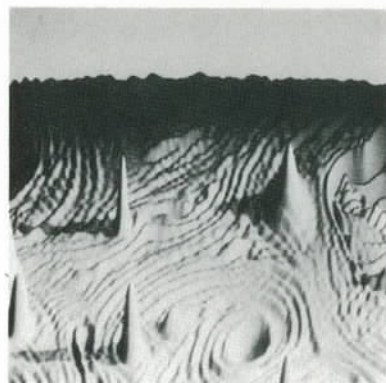
2. EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES. — Les expériences numériques décrites ici sont réalisées à partir d'un modèle pseudo-spectral sur le plan doublement périodique, dont la résolution spatiale est de 128×128 points; une troncature supplémentaire, circulaire, est imposée au nombre d'onde 64 pour garantir une quasi-isotropie des petites échelles. On obtient une bonne conservation des invariants de (1) en utilisant pour l'intégration temporelle le schéma « leapfrog », associé à un pas de temps égal à 75 % de l'inverse de la fréquence des ondes inertio-gravitationnelles les plus rapides.

La simulation numérique de la turbulence pleinement développée, décroissante ou forcée, se heurte toujours au problème de la modélisation de l'effet des structures d'échelle inférieure à la maille, dans la mesure où les échelles de dissipation ne peuvent être résolues en pratique; or cette modélisation est bien sûr à définir en fonction des propriétés inconnues de la turbulence, que l'on veut justement atteindre par le moyen de la simulation numérique. Faute de théorie, nous avons pris le parti d'utiliser une dissipation très sélective en échelle — un laplacien itéré huit fois, technique qui a fait ses preuves en turbulence incompressible ([1], [4]). Nous l'appliquons ici à toutes les variables, par le biais d'une formulation implicite du type Crank-Nicholson.

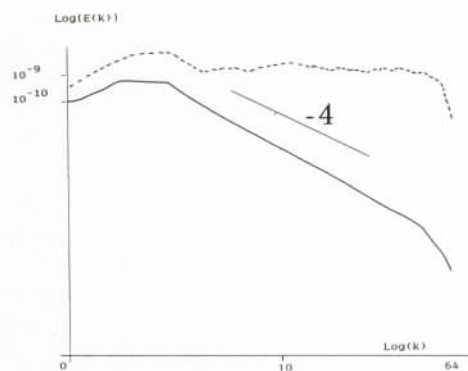
Nous présentons les résultats de quatre expériences numériques réalisées dans des conditions proches de l'écoulement atmosphérique terrestre: géopotential moyen:



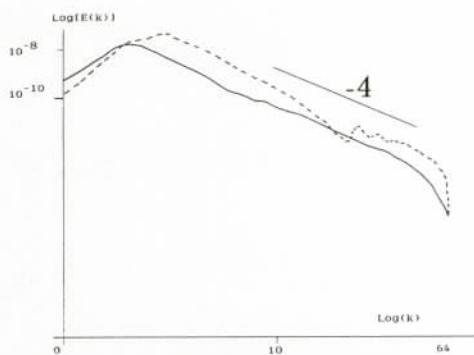
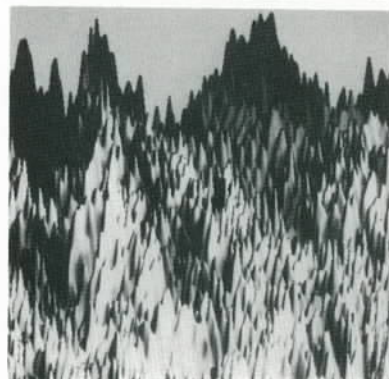
RM



RR



SM



SR



Fig. 1. — Spectres d'énergies rotationnelle (—) et gravitationnelle (-----).

Fig. 1. — Rotational (—) and gravitational (-----) energy spectra.

Fig. 2. — Champ de vorticité.

Fig. 2. — Vorticity field.

$10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$; fluctuations de géopotential: $\pm 4000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$; vitesse moyenne: 0 ms^{-1} ; fluctuations de vitesse: $\pm 15 \text{ ms}^{-1}$; taille du domaine périodique: 6400 Km. Les champs de vitesse et de géopotential ont initialement un maximum d'énergie au nombre d'onde 3 avec des phases aléatoires. Les deux premières expériences sont effectuées en partant d'un écoulement initialement dominé par les effets rotationnels, noté \mathcal{R} . Les deux dernières expériences sont réalisées en partant d'un écoulement dominé par les ondes gravitationnelles, noté \mathcal{G} . Chacune des deux séries d'expériences est effectuée à rotation modérée, notée M, et à rotation rapide, notée R. Les expériences à rotation modérée ont un paramètre de Coriolis de 10^{-4} s^{-1} , c'est-à-dire un rayon de déformation de 3200 km, ce qui correspond typiquement à l'atmosphère terrestre aux moyennes latitudes. Les expériences à rotation rapide ont un paramètre de Coriolis de $6 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, c'est-à-dire un rayon de déformation de 533 km.

3. RÉSULTATS ET DISCUSSION. — La figure 1 montre les spectres d'énergies rotationnelle (5) et inertio-gravitationnelle (6) pour les quatre expériences $\mathcal{R}M$, $\mathcal{R}R$, $\mathcal{G}M$, $\mathcal{G}R$, obtenus au bout d'un temps suffisamment long — correspondant à 45 jours d'évolution de l'atmosphère terrestre dans les conditions précisées plus haut, soit plusieurs centaines de fois le temps moyen de retournement des tourbillons.

On observe d'abord une tendance générale vers des spectres proches de k^{-4} pour $E(k)$, comme dans de nombreuses simulations numériques de turbulence bi-dimensionnelle incompressible ([1], [4]), et cela quel que soit le niveau d'énergie inertio-gravitationnelle et le taux de rotation (¹). Ce résultat est cohérent avec les équipartitions d'ensrophie obtenues par Sadourny [12] dans le cas inviscide. Par contre ces spectres d'énergie rotationnelle, que l'on voit suivre dans tous les cas une loi en k^{-4} , correspondent dans l'espace physique à des morphologies très différentes du champ de vortacité avec apparition ou non, suivant les cas, de structures cohérentes isolées (fig. 2).

Du côté des ondes inertio-gravitationnelles, on observe au contraire un comportement spectral très sensible à l'intensité de la rotation, ou, si l'on préfère, à la magnitude du rayon de déformation. Dans le cas des rotations modérées, ou des épaisseurs équivalentes élevées, l'énergie inertio-gravitationnelle se répand largement vers les petites échelles, suivant une pente spectrale proche de k^0 . Ce phénomène se traduit globalement par une dissipation appréciable de l'énergie totale initiale, ce qui ne se produit jamais dans le cas incompressible quasi-géostrophique. Ceci est également en accord avec les résultats de Sadourny [7], qui obtenait dans le cas inviscide à rotation nulle une équipartition d'énergie divergente, prédisant pour les ondes gravitationnelles un comportement turbulent dominé par une cascade d'énergie vers la petite échelle, comme c'est le cas en turbulence tri-dimensionnelle. En ce qui concerne les rotations rapides, ou les épaisseurs équivalentes faibles, au contraire, la dissipation d'énergie totale tout comme la dissipation d'ensrophie potentielle restent négligeables; l'énergie inertio-gravitationnelle, comme l'énergie rotationnelle « géostrophique », reste confinée dans les grandes échelles où elle était initialement contenue, comportement prédit par Farge et Sadourny [3].

Il est intéressant de remarquer que, de même qu'une turbulence tri-dimensionnelle ne se bi-dimensionnalise pas sous l'effet d'une rotation ([6], [10]), de même une turbulence en présence d'ondes inertio-gravitationnelles ne tend pas vers le quasi-géostrophisme sous l'effet d'une rotation. Il apparaît que, dans les deux cas, l'inhibition des transferts d'énergie, là dans les modes tridimensionnels non normaux à la rotation, ici dans les modes inertio-gravitationnels, tend à maintenir la distribution initiale d'énergie dans ces modes au lieu de l'évacuer, car, les fréquences linéaires (propres à la rotation ou aux

ondes d'inertie-gravité) étant plus élevées que les fréquences non linéaires, elles déphasent les structures avant que les interactions non linéaires n'aient eu le temps de se produire. L'énergie reste bloquée où elle se trouvait initialement, c'est à dire à grande échelle, et les petites échelles sont dissipées sans être alimentées par les processus de cascade venant de la grande échelle.

Tanaka [8] puis Yanase et Yamada [9] ont noté un effet inhibiteur des ondes inertio-gravitationnelles sur la cascade inverse d'énergie rotationnelle. Bien que nous nous soyons placés ici dans le cadre d'une turbulence décroissante, donc sans véritable cascade inverse, un effet de ce type est observé clairement si l'on compare par exemple les spectres d'énergie de $\mathcal{R}M$ et du $\mathcal{G}M$. Les mécanismes classiques inhibiteurs des transferts sont basés sur l'interaction entre ces transferts non linéaires et des oscillations linéaires rapides qui en changent périodiquement le sens: c'est le cas pour la turbulence en présence d'ondes de Rossby [5] et pour la turbulence tridimensionnelle en rotation ([6], [10]); c'est aussi le cas pour l'inhibition des transferts d'énergie inertio-gravitationnelle décrite plus haut. L'inhibition de la cascade inverse d'énergie rotationnelle apparaît plus complexe, puisqu'elle fait intervenir l'interaction entre deux types d'ondes de propriétés très différentes.

(¹) Par rapport à Farge et Sadourny [3], qui prédisent dans le cas géostrophique une augmentation de pente pour les rotations élevées, notons que les rayons de déformation utilisés ici ne sont pas assez petits pour que cet effet soit sensible.

Les calculs numériques ont été effectués grâce au Cray du C₂VR de Palaiseau et en utilisant le calculateur frontal du C.I.R.C.E. d'Orsay. Les visualisations ont été réalisées au LACTAMME, École Polytechnique, en collaboration avec Jean-François Colonna.

Reçue le 30 juin 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C. BASDEVANT, *Thèse d'état*, Université de Paris-VI, 1981.
- [2] M. E. BRACHET, *Thèse d'état*, Université de Nice, 1983.
- [3] M. FARGE et R. SADOURNY, *Comptes rendus*, 302, série II, 1986, p. 847-850.
- [4] J. MCWILLIAMS, *J. Fluid Mech.*, 146, 1984, p. 21-43.
- [5] P. RHINES, *J. Fluid Mech.*, 69, 1978, p. 417-443.
- [6] P. ROY, *Thèse d'état*, Université de Nice, 1986.
- [7] R. SADOURNY, *J. Atmos. Sc.*, 3, n° 4, 1975, p. 680-689.
- [8] H. TANAKA, *J. Meteo. Sc. Japan*, 62, n° 2, 1984, p. 199-214.
- [9] S. YANASE et M. YAMADA, *J. Phys. Soc. Japan*, 53, n° 8, 1984, p. 2513-2520.
- [10] R. A. WIGELAND et H. M. NAGIB, *IIT Fluid and Heat Transfer Report R. 78-1*, Illinois Institute of Technology, 1978.

*Laboratoire de Météorologie dynamique du C.N.R.S.,
École Normale Supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 5.*