

Transformée en ondelettes pour détecter et analyser les structures cohérentes dans les écoulements turbulents bidimensionnels

Marie FARGE et Gabriel RABREAU

Résumé — La transformée en ondelettes réalise une décomposition à la fois en espace et en échelle, ce qui permet de détecter et d'analyser les structures cohérentes émergeant au sein des écoulements turbulents. Nous effectuons l'analyse spectrale en ondelettes d'une coupe uni-dimensionnelle obtenue à partir d'un champ de vortacité bidimensionnel, ceci à deux instants différents de son évolution. Nous montrons ainsi que, dans les écoulements bidimensionnels non forcés, les plus petites échelles se trouvent concentrées dans les noyaux des tourbillons, et non à leur périphérie comme on le pensait auparavant.

Wavelet transform to detect and analyze coherent structures in two-dimensional turbulent flows

Abstract — The wavelet transform, by performing a space-scale decomposition, can detect and analyze the coherent structures emerging out of turbulent flows. We perform the wavelet spectral analysis of a one-dimensional cut obtained from a two-dimensional vorticity field, considering two different instants of its evolution. We thus show that, in two-dimensional decaying flows, the smallest scales are concentrated inside the vortex cores, and not on their periphery as it was thought before.

Abridged English Version — 1. COHERENT STRUCTURES IN TURBULENT FLOWS. — Coherent structures have been recognized as essential features of turbulent flows ([1], [2], [3]). Their presence results from the nonlinear dynamics of these flows, from which they emerge by a phase locking process and then last on time scales much longer than the eddy turn-over time. After the early stage, where the flow is being condensed into coherent vortices, the nonlinear transfers are no more uniformly active in all space but are concentrated in the shear layers formed at their periphery. The flow can then be separated into these coherent vortices, which are dynamically active through their mutual interactions, and a background flow, passively advected by them. Fourier analysis is not adapted to separate those structures from the rest of the flow, because it loses the information concerning the coherence present in physical space. We are looking for a space-scale decomposition able to detect and analyze the coherent structures present in two-dimensional flows. This is why we will consider here the wavelet transform, recently developed by Morlet, Grossmann and Meyer ([4], [5], [6]).

2. SPACE-SCALE DECOMPOSITION USING WAVELET TRANSFORM. — Any transform realizes a correspondance between physical space x and spectral space k , by convoluting the signal f to be analyzed with a given analyzing function ψ . Figure 1 shows four examples of analyzing functions adapted, either to scale (1 *a*), or to space (1 *b*) decompositions, or to both (1 *c* and *d*); looking at the space-scale diagram ($|x|, |k|$), we see how the wavelet transform achieves an optimal compromise between space resolution Δx and scale resolution Δk in terms of the uncertainty principle, corresponding to Nyquist relation $\Delta x \cdot \Delta k = \text{Const}$.

The wavelet transform uses functions ψ , called wavelets (Fig. 1 *d*), presenting only few oscillations in a gaussian envelop, that are translated (parameter b) and dilatated (parameter a), such as [1] and [2]. The wavelet transform also verifies Parseval's relation, *i.e.* conserves energy, such as [3].

Note présentée par Paul GERMAIN.

The wavelet transform is particularly adapted to the analysis of non-periodic signals, especially if they present complex transient behaviours, and even singularities, the only requirement being that the signal should have a finite energy; indeed, it locally measures the holder regularity of the signal, or even gives the order of an eventual singularity, which is important in the context of turbulent flow analysis. We can choose different wavelets, or continuous, or discrete, under the conditions that they have a zero mean value, a finite energy and that their Fourier transform exists. We will consider here the Morlet wavelet (Fig. 2)[6], which is continuous and complex valued, giving thus a modulus and a phase in spectral space. The isophase lines have the property of converging on the most irregular parts of the signal, while the modulus gives the scale analysis of the energy density.

3. APPLICATION. — The wavelet decomposition of a one-dimensional signal gives a two-dimensional spectral space, with space (parameter b) in abscisse and the logarithm of the scale (parameter a) in ordinate. If ultimately we are interested to analyze two-dimensional turbulent fields, to which corresponds a four-dimensional wavelet spectral space, as a first step to demonstrate the technics, we will here analyze a uni-dimensional section of a two-dimensional vorticity field, obtained by numerically integrating Saint-Venant's equations with an initial "balance" condition[7]. The field here being vorticity, the corresponding mean-square measure is enstrophy (mean square of the vorticity field) instead of energy. We will study two different states of the flow: the first, close to the initial instant, *i.e.* before the formation of coherent structures, and the second at a later stage, where the vorticity field has been condensated into few coherent vortices.

Figure 3a gives the wavelet analysis of the flow after one eddy turn-over time: enstrophy is distributed between all scales and this quite uniformly in space, with a maximum at wavenumber $k=3$, which corresponds to the initial excitation of the flow; the isophase lines show the emergence of a coherent vortex near $x=300$. Figure 3b corresponds to the flow after 100 eddy turn-over times: enstrophy is now condensated into one large scale coherent vortex surrounded by a smooth background; the isophase lines point at the core of the vortex located near $x=250$. *In conclusion*, the wavelet analysis has shown that the cores of the vortices are the most irregular features in the vorticity field where most of the enstrophy is concentrated, while the background flow in between vortices is much more regular and less excited. This tends to contradict the classical interpretation of two-dimensional turbulent flows[2]: the smallest scales of the vorticity field are not the filamentary structures, which get developed at the vortex periphery under the action of the enstrophy cascade, but are concentrated inside the vortex cores. Dissipation, which is proportional to the vorticity laplacian, and therefore sensitive to the small scales, would thus act not only on the vorticity filaments, but also on the internal structure of vortices. This conclusion may be very general, or restricted only to the case of decaying compressible two-dimensional turbulent flows studied here.

We should now generalize this approach by using a two-dimensional wavelet transform, which will in addition give us information on the local polarization of the flow and enable us to separate the coherent vortices, which are non polarized, from the background flow, formed of vorticity filaments which are highly polarized. Then, after choosing an appropriate filter and using the invertability property of the wavelet transform, we should be able to reconstruct two vorticity fields, one corresponding to the background flow and the other to the coherent vortices alone, in order to study their dynamics separately. This decomposition

technics may be more adequate than the present thresholding used to filter the coherent vortices out of the turbulent flows.

1. STRUCTURES COHÉRENTES DANS LES ÉCOULEMENTS TURBULENTS. — On pense aujourd'hui que les structures cohérentes jouent un rôle essentiel dans la dynamique non linéaire des écoulements turbulents ([1], [2], [3]). Elles se forment spontanément au sein de ceux-ci, par un processus de blocage de phase, et survivent sur des échelles de temps bien supérieures au temps de retournement des tourbillons. Après une phase initiale où l'écoulement se condense en tourbillons cohérents, les transferts non linéaires ne sont plus actifs uniformément dans l'espace mais restent concentrés dans les couches limites qui se développent autour des tourbillons. L'écoulement peut alors être séparé entre ces structures cohérentes, qui de par leurs interactions mutuelles constituent sa partie dynamiquement active, et un écoulement résiduel passivement advecté par celles-ci. L'analyse de Fourier n'est pas adaptée pour extraire ces structures du reste de l'écoulement, car elle ne tient pas compte de la cohérence présente dans l'espace physique. Nous recherchons une technique de décomposition, à la fois en espace et en échelle, capable de détecter et d'analyser les structures cohérentes présentes dans les écoulements turbulents

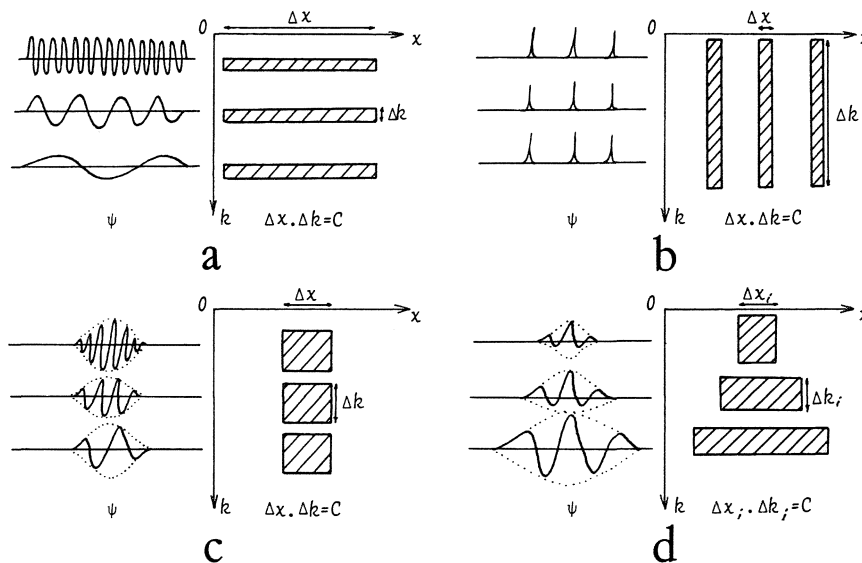


Fig. 1. — Quatre exemples de fonctions analysatrices et comment elles se comportent vis-à-vis du principe d'incertitude (cf. cellules d'information de Gabor $\Delta x \cdot \Delta k = Cte$). (a) Analyse spectrale à l'aide de la transformée de Fourier. *A gauche* : fonctions analysatrices trigonométriques. *A droite* : pas de résolution spatiale Δx , mais résolution optimale en échelle Δk . (b) Analyse spatiale à l'aide de l'échantillonnage de Shannon. *A gauche* : impulsions de Dirac comme fonctions analysatrices. *A droite* : résolution spatiale optimale, mais pas de résolution en échelle. (c) Analyse espace-échelle à l'aide de la transformée de Gabor (Fourier à fenêtre glissante). *A gauche* : fonctions analysatrices ayant une enveloppe gaussienne constante. *A droite* : mêmes résolutions en espace et en échelle quel que soit le nombre d'onde. (d) Analyse espace-échelle à l'aide de la transformée en ondelettes. *A gauche* : ondelettes analysatrices de forme constante. *A droite* : résolutions en espace et en échelle optimales, adaptées pour chaque nombre d'onde i .

Fig. 1. — Four examples of analyzing functions and how they behave in terms of the uncertainty principle (cf. Gabor's information cells $\Delta x \cdot \Delta k = Const.$). (a) Scale analysis using Fourier transform. Left: trigonometric analyzing functions. Right: no space resolution Δx , but optimal scale resolution Δk . (b) Space analysis using Shannon sampling. Left: Dirac pulses as analyzing functions. Right: optimal space resolution, but no scale resolution. (c) Space-scale analysis using Gabor (windowed Fourier) transform. Left: trigonometric analyzing functions with a constant gaussian envelope. Right: same space and scale resolutions irrespectively of the wave number. (d) Space-scale analysis using wavelet transform. Left: wavelet analyzing functions of constant shape. Right: optimal space and scale resolutions, adapted for each wave number i .

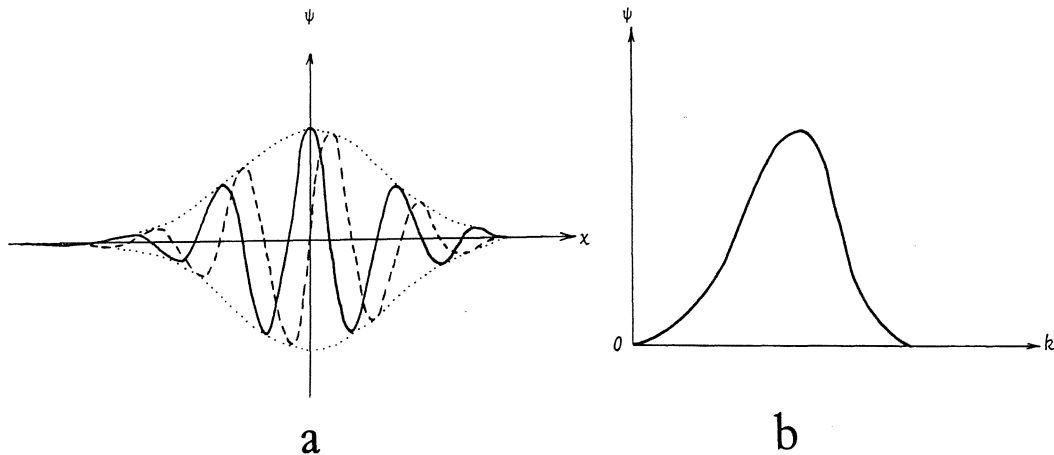


Fig. 2. — (a) Ondelette complexe de Morlet : partie réelle — et partie imaginaire (-----).
(b) Transformée de Fourier de l'ondelette de Morlet (module).

Fig. 2. — (a) Morlet complex wavelet: real part — and imaginary part -----.
(b) Fourier transform of the Morlet wavelet (modulus).

bidimensionnels. Nous avons ainsi été conduits à utiliser la transformée en ondelettes, récemment développée par Morlet, Grossmann et Meyer ([4], [5], [6]).

2. DÉCOMPOSITION ESPACE-ÉCHELLE A L'AIDE DE LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES. — Toute transformée réalise une correspondance entre l'espace physique x et l'espace spectral k , en convoluant le signal à analyser f avec une fonction analysatrice donnée ψ . La figure 1 montre quatre exemples de fonctions analysatrices différentes, adaptées soit à une décomposition en échelle (1 a), soit à une décomposition spatiale (1 b), soit aux deux (1 c et 1 d); le diagramme espace-échelle ($|x|$, $|k|$) nous montre que la transformée en ondelettes réalise un compromis optimal entre une résolution spatiale Δx et une résolution en échelle Δk , conformément au principe d'incertitude donné par la relation de Nyquist $\Delta x \cdot \Delta k = \text{Cte}$.

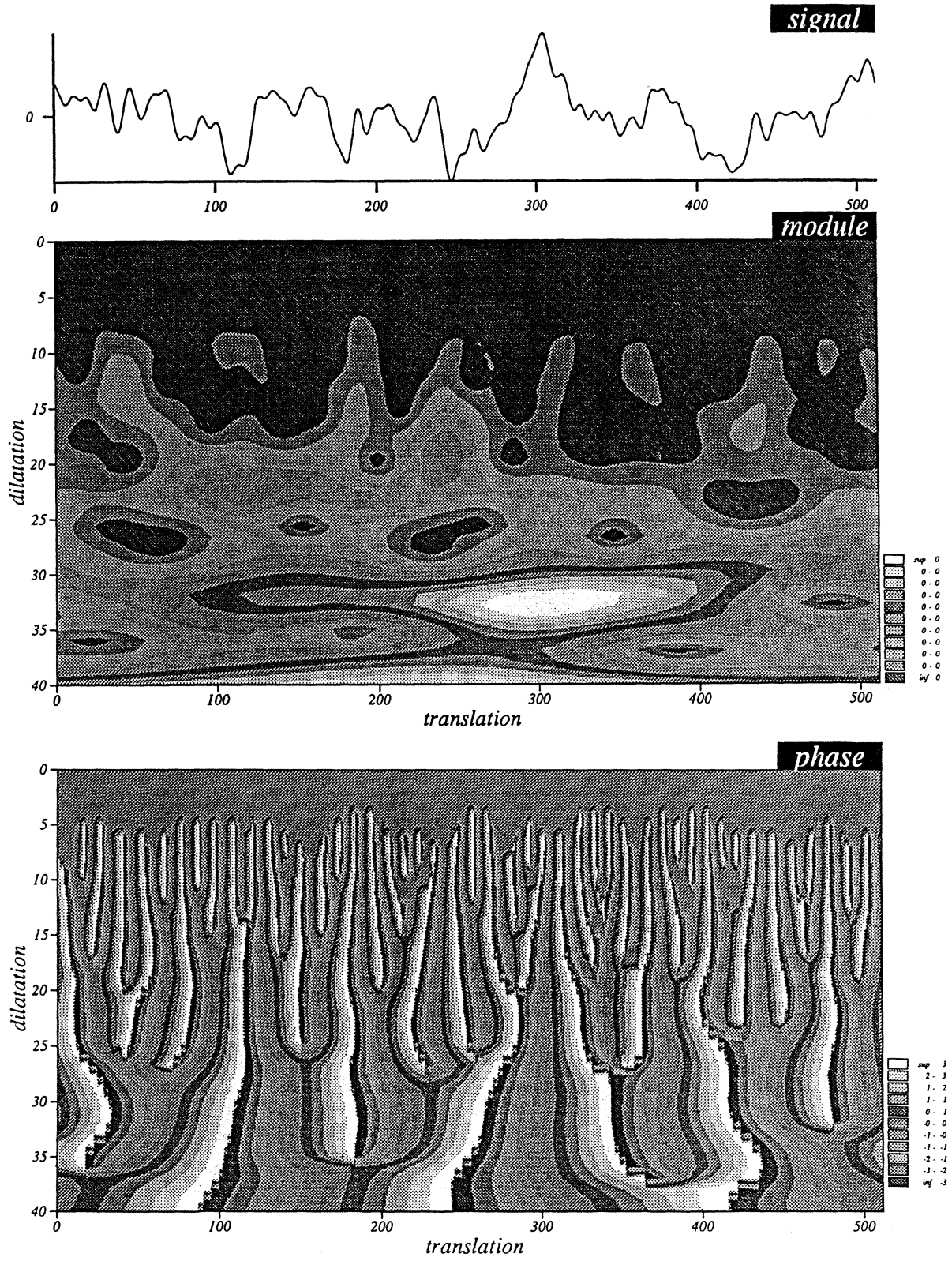
La transformée en ondelettes utilise des fonctions (fig. 1 d) ne présentant que quelques oscillations à l'intérieur d'une enveloppe gaussienne, que l'on translate (paramètre b) et dilate (paramètre a), ce qui donne la décomposition suivante :

$$(1) \quad \tilde{f}(a, b) = a^{-1/2} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(\frac{x-b}{a} \right) f(x) dx \quad \text{pour l'analyse.}$$

EXPLICATIONS DES PLANCHES I ET II

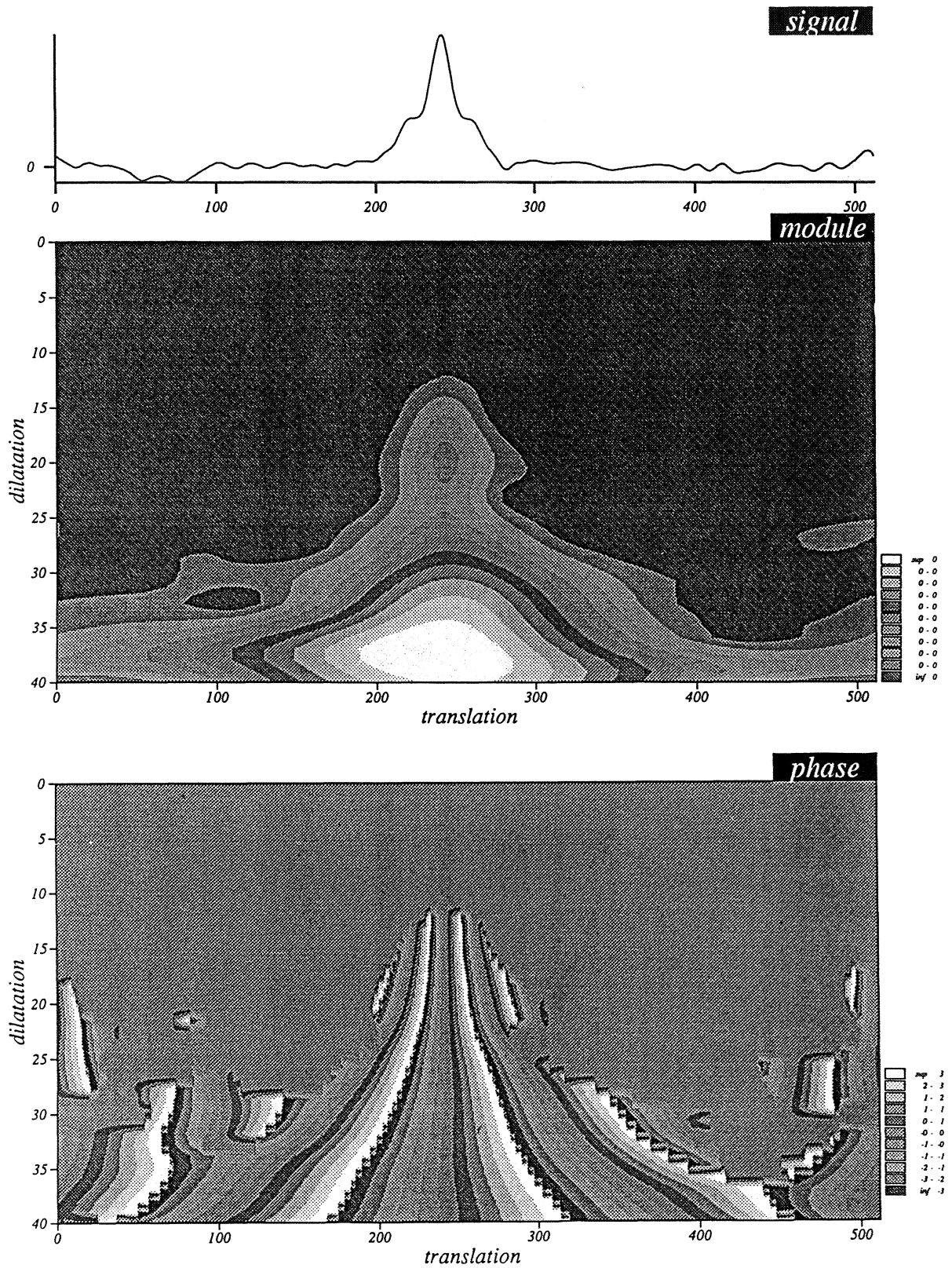
Fig. 3. — Décomposition en ondelettes (2, module; 3, phase) d'une coupe unidimensionnelle (1) obtenue à partir d'un champ de vorticité bidimensionnel. Le paramètre de translation b (donné sur 512 points) est porté en abscisse et le logarithme du paramètre de dilatation a (donné sur 8 octaves avec 5 points par octave) est porté en ordonnée. (a) État de l'écoulement proche de l'instant initial, après un temps de retournement des tourbillons : les structures cohérentes ne se sont pas encore formées. (b) État tardif de l'écoulement, après 100 temps de retournement des tourbillons : condensation du champ de vorticité en une structure cohérente isolée, les plus petites échelles se trouvant concentrées dans le noyau de ce tourbillon.

Fig. 3. — Wavelet decomposition (2, modulus; 3, phase) of a one-dimensional section (1) from a two-dimensional vorticity field. The translation parameter b (given on 512 points) is shown in abscissa and the logarithm of the dilatation parameter a (given on 8 octaves with 5 points by octave) is shown in ordinate. (a) Early stage of the flow, after one eddy turn-over time: the coherent structures are not yet formed. (b) Later stage of the flow, after 100 eddy turn-over times: condensation of the vorticity field into one isolated coherent structure, the smallest scales being concentrated inside the vortex core.



(a)

Fig. 3



(b)

Fig. 3

ψ^* , le conjugué complexe de ψ ,

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{C(\psi)} \int_{a=0}^{\infty} a^{-1/2} \int_{b=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(a, b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2} \quad \text{pour la synthèse,}$$

avec $C(\psi) = 2\pi \int_{x=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx/x$ et $\hat{\psi}$ la transformée de Fourier de ψ .

La transformée en ondelettes vérifie également la relation de Parseval, c'est-à-dire la conservation de l'énergie, telle que :

$$(3) \quad \int_{x=-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{C(\psi)} \int_{a=0}^{+\infty} \int_{b=-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2}.$$

La transformée en ondelettes est particulièrement adaptée à l'analyse des signaux non périodiques, surtout s'ils présentent des comportements transitoires complexes, voire des singularités, la seule condition étant que ceux-ci soient d'énergie finie; en effet, elle permet de mesurer localement la régularité hölderienne du signal, voire donne l'ordre d'une éventuelle singularité, ce qui est important pour analyser les écoulements turbulents. On peut choisir différentes ondelettes, soit continues, soit discrètes, à la condition toutefois que : leur moyenne soit nulle, leur énergie finie et que leur transformée de Fourier existe. Nous utiliserons ici l'ondelette de Morlet (fig. 2) [6], qui est continue et à valeur complexe, donnant ainsi un module et une phase dans l'espace spectral. Nous verrons que les lignes d'isophase ont la propriété de converger sur les parties les plus irrégulières du signal, tandis que le module montre la répartition en échelle de la densité d'énergie.

3. APPLICATION. — La décomposition en ondelettes d'un signal unidimensionnel donne un espace spectral bidimensionnel; on indique l'espace en abscisse (paramètre de translation b) et le logarithme de l'échelle en ordonnée (paramètre de dilatation a). Bien que notre but soit d'analyser en ondelettes des champs turbulents bidimensionnels, auxquels correspond un espace spectral quadridimensionnel, nous allons démontrer l'intérêt de la technique en analysant une section unidimensionnelle obtenue à partir d'un champ de vorticités bidimensionnel, solution des équations de Saint-Venant intégrées numériquement à partir d'un écoulement initial en équilibre « balance » [7]. Le champ à analyser étant ici une vorticités, la mesure de carré moyen qui lui correspond n'est pas l'énergie mais l'enstrophie (carré moyen de la vorticités). Nous allons étudier deux états différents de l'écoulement : le premier, peu de temps après l'instant initial, c'est-à-dire avant que les structures cohérentes n'aient eu le temps de se former, et le second beaucoup plus tardif, après que le champ de vorticités se soit condensé en quelques tourbillons cohérents isolés.

La figure 3a montre l'analyse en ondelettes de l'écoulement après un temps de retournement des tourbillons : l'enstrophie est répartie entre toutes les échelles, et ceci quasi-uniformément dans l'espace, avec un maximum au nombre d'onde $k=3$, correspondant à l'excitation initiale de l'écoulement; les lignes d'isophase montrent l'émergence d'un tourbillon cohérent au voisinage de $x=300$. La figure 3b correspond à l'état de l'écoulement après une centaine de temps de retournement des tourbillons : l'enstrophie est maintenant condensée dans un seul tourbillon cohérent de grande échelle; les lignes d'isophase pointent sur le centre du tourbillon localisé au voisinage de $x=250$. *En conclusion*, l'analyse en ondelettes a montré que les centres des tourbillons correspondent aux régions les plus irrégulières du champ de vorticités, où se trouve concentrée la plus grande partie de l'enstrophie, tandis que l'écoulement résiduel se développant entre les

tourbillons est beaucoup plus régulier et moins excité. Ceci contredit l'interprétation que l'on donne classiquement pour les écoulements turbulents bidimensionnels [2] : les plus petites échelles du champ de vortacité ne sont pas les structures filamenteuses, se développant à la périphérie des tourbillons sous l'action de la cascade d'énstrophie, mais se trouvent concentrées dans les noyaux des tourbillons. La dissipation, qui est proportionnelle au laplacien de la vortacité, donc sensible aux petites échelles, agirait ainsi, non seulement sur les filaments de vortacité, mais également sur la structure interne des tourbillons. Il se peut que cette conclusion soit très générale, ou seulement limitée au cas des écoulements turbulents bidimensionnels compressibles non forcés étudiés ici.

Nous devons maintenant généraliser cette approche en utilisant une transformée en ondelettes bidimensionnelles, qui nous apportera une information supplémentaire sur la polarisation locale de l'écoulement, nous permettant ainsi de séparer les tourbillons cohérents, qui sont non polarisés, de l'écoulement résiduel, formé de filaments de vortacité hautement polarisés. Ensuite, à l'aide d'un filtrage approprié et en utilisant la propriété d'inversibilité de la transformée en ondelettes, nous pourrions reconstruire deux champs de vortacité, l'un correspondant à l'écoulement résiduel et l'autre aux seules structures cohérentes, ceci afin d'étudier leur dynamique séparément. Cette technique de décomposition devrait s'avérer plus adéquate que le filtrage par seuil actuellement utilisé pour extraire les tourbillons cohérents dans les écoulements turbulents.

Nous remercions vivement Ginette Saracco et Richard Kronland-Martinet qui nous ont fourni leur programme de transformée en ondelettes, ainsi que Thierry Avrain qui l'a adapté sous Unix. Les calculs ont été effectués sur le « Cray 2 » du C₂ VR, Palaiseau, en utilisant comme calculateur frontal l'« IBM3090 » du C.I.R.C.E., Orsay.

Note reçue le 26 septembre 1988, acceptée le 4 octobre 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C. BASDEVANT, B. LEGRAS, R. SADOURNY et M. BÉLAND, A study of barotropic model flows: intermittency, waves and predictability, *J. Atmos. Sc.*, 38, 1981, p. 2305-2326.
- [2] J. C. MCWILLIAMS, The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, 146, 1984, p. 21-43.
- [3] A. K. M. FAZLE HUSSAIN, Coherent structures and turbulence, *J. Fluid Mech.*, 173, 1986, p. 303-356.
- [4] S. JAFFARD, P. G. LEMARIÉ, S. MALLAT et Y. MEYER, Multiscale analysis, *Centre de Mathématiques*, École Polytechnique, 1986.
- [5] R. KRONLAND-MARTINET, J. MORLET et A. GROSSMANN, Analysis of sound patterns through wavelet transform, *International Journal on Pattern Analysis and Artificial Intelligence*, 1, n° 2, 1987, p. 273-302.
- [6] A. GROSSMANN et J. MORLET, Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms, *Mathematics and Physics, Lectures on recent results*, World Scientific, 1988.
- [7] M. FARGE et R. SADOURNY, Wave-vortex dynamics in rotating shallow water, *J. Fluid Mech.*, 1988 (à paraître).