# L'évolution des idées sur la turbulence 1870-1970

Marie FARGE
LMD-CNRS
Ecole Normale Supérieure
24, rue Lhomond
75231 Paris Cedex 5

Conférence donnée au Palais de la Découverte le Mardi 18 Octobre 1988, à l'occasion du Colloque 'Un siècle de rapports de la physique et des mathématiques (1870-1970)', organisé par le Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure.

Résumé

Nous décrirons l'alternance entre des travaux essentiellement mathématiques, concernant les équations de Navier-Stokes, et des approches plus physiques, étudiant d'une part la transition vers la turbulence du point de vue de la stabilité, et d'autre part la turbulence pleinement développée, ceci à l'aide de techniques issues de la mécanique statistique. Nous montrerons le rôle essentiel et spécifique joué par l'expérimentation numérique apparue plus récemment. Nous limiterons cette étude à la période allant de 1870 à 1970, négligeant ainsi les développements plus récents en théorie de la turbulence.

## 1. Les prémisses à partir de 1870

Les premières idées modernes sur la turbulence nous viennent des mathématiques à la fin du siècle dernier. C'est en particulier le cas pour la sensibilité aux conditions initiales qui fut pressentie par Saint-Venant. En effet, Saint-Venant et son élève Boussinesq, en étudiant le comportement des solutions d'équations aux dérivées partielles au voisinage d'une singularité montrèrent qu'une perturbation infinitésimale des paramètres pouvait changer complètement la solution obtenue /Boussinesq 1877/, /Saint-Venant 1877/. Saint-Venant concluait en disant que c'était grâce à cela que le libre arbitre était enfin compatible avec un univers entièrement déterministe / /. Cette idée fut reprise par Maxwell dans une conférence intitulée 'Est-ce que le progrès des sciences physiques donne l'avantage à l'idée de nécessité (ou de déterminisme) sur celle de contingence des évènements et de libre arbitre ?', et il en fait crédit à Saint-Venant et à Boussinesq en déclarant que 'leur travail sur les solutions singulières marque un tournant dans le siècle' car il apporte 'la grande solution au problème du libre arbitre'/ /.

En 1912, dans l'introduction du traité des probabilités de Poincaré / /on retrouve la même idée, ainsi qu'un peu plus tard chez Hadamard / /et Duhem / /. Poincaré explique très clairement : 'Une cause très petite qui nous échappe détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il en est pas toujours ainsi ; il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction (au sens déterministe) devient impossible' / /.

Dans sa thèse de 1933 /Leray 1933/, Leray interprète la turbulence d'un point de vue purement mathématique, comme la perte de la stabilité et de l'unicité de la solution laminaire des équations de Navier-Stokes à partir d'une valeur critique du nombre de Reynolds (nombre sans dimension construit comme le rapport des forces d'inertie aux forces de dissipation), valeur au-delà de laquelle apparaissent plusieurs solutions turbulentes dont le comportement n'est plus descriptible que statistiquement. Cette interprétation conduit ainsi à deux types de théories : celles qui étudient la stabilité de la solution linéaire faiblement perturbée et s'intéressent alors à la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent, et celles qui appliquent un traitement statistique pour intégrer les équations non linéaires dans le cas où la turbulence est pleinement développée.

## 2. Les théories de la stabilité

Le premier type d'approche peut être illustré par la thèse de doctorat d'Heisenberg / / qui, en 1924, étudia la stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan (écoulement entre deux parois parallèles fixes) et évalua la valeur du nombre de Reynolds critique dans ce cas à 500. Cette approche, largement développée entre 1907 et 1940, avec les travaux de physiciens tels Orr, Lord Rayleigh, Taylor, Hopf et Tollmien, s'avéra plus difficile que prévue et décevante vis-à-vis des vérifications expérimentales. Il apparaissait clairement que le traitement linéaire est insuffisant pour aborder le problème de la turbulence quand celle-ci est pleinement développée, car on ne peut plus alors définir l'état quasi-stationnaire permettant de linéariser le problème, sauf cas particuliers liés à des référentiels appropriés (couches limites, solitons, chocs...).

## 3. Les théories statistiques

Quant à l'approche statistique (1) , elle remonte à Reynolds qui, à la fin du siècle dernier, proposa de décomposer les champs turbulents en une partie moyennée et une partie fluctuante. Ceci posa alors un problème de fermeture des équations de Navier-Stokes réécrites de cette façon, difficulté que Prandtl /1925/ résolut en remplaçant les moments du premier ordre (produit des fluctuations de vitesse moyenné) par un terme de 'viscosité turbulente' construit à partir d'une 'longueur de mélange' caractérisant l'échelle des fluctuations de vitesse. En 1921, Taylor /1921/ remplaça l'idée de longueur de mélange par celle de fonction de corrélation, définie d'abord en termes lagrangiens, puis ensuite en termes eulériens, mais sans savoir comment relier ces fonctions à des grandeurs mesurables. Ce n'est que 17 ans plus tard /Taylor 1935/ qu'il relia cette notion à celle de spectre, ce qui permit ainsi de faire le lien entre les théories statistiques et les expériences de laboratoire, celles de Taylor lui-même / / et celles de Von Karman / /.

(1) Il est nécessaire de préciser ici que la relation qui existe entre la mécanique statistique et la mécanique des fluides est purement mathématique, qu'elle n'a rien à voir avec le fait que les fluides sont décrits à l'échelle microscopique par les équations de Boltzmann.

Le point de vue statistique avait cependant été délaissé pendant près de cinquante ans et ne fut repris par les théoriciens que dans les années 1930 avec les travaux de Gebelein /1935/, qui essaya d'appliquer la théorie des probabilités de Kolmogorov à l'hydrodynamique, puis au début des années 1940 par ceux de Kolmogorov /1941a/, /1941b/, /1941c/, Obukhov /1941/, Onsager /1945/, Von Weizsäcker /1948/ et Heisenberg /1948/. En partant de considérations statistiques au sens de Gibbs (c'est-à-dire construites à partir d'un ensemble de réalisations de l'écoulement) et en traitant les composantes de la vitesse comme des variables aléatoires au sens de la théorie des probabilités, Kolmogorov /1941a/, /1941b/, /1941c/ et Obukhov /1941/ établirent que dans la zone inertielle (gamme d'échelles où l'on suppose que le système a un comportement conservatif, c'est-à-dire que l'énergie n'est ni produite ni dissipée mais seulement transférée entre différentes échelles) les corrélations de vitesse varient comme $\varepsilon r^{2/3}$ ($\varepsilon$, taux de transfert de l'énergie et r, distance entre deux points). Il faut remarquer ici que l'existence d'une zone inertielle importante n'est possible que dans le cas de la turbulence pleinement développée, c'est-à-dire pour les très grands nombres de Reynolds que l'on rencontre par exemple dans les écoulements géophysiques ou astrophysiques. La théorie de Kolmogorov , communément appelée K41, repose sur trois hypothèses :

1. la turbulence est statistiquement homogène (invariante par translation) et isotrope (invariante par rotation) à petite échelle,
2. les propriétés statistiques ne dépendent que de l'énergie dissipée $\varepsilon$,
3. dans la zone inertielle, l'énergie est transférée sans dissipation et selon un taux constant $\varepsilon$.

La première hypothèse remonte aux travaux de Taylor /1935/ et de Von Karman /1938/, tandis-que les deux autres hypothèses avaient déjà été perçues intuitivement vingt ans plus tôt par le météorologue anglais Richardson, auquel on doit la paraphrase suivante du poème de J. Swift, où les puces sont devenues des tourbillons : '

Les gros tourbillons ont de petits tourbillons, qui se nourissent de leur vitesse, et les petits tourbillons en ont de plus petits, et ainsi de suite jusqu'à la viscosité (au sens moléculaire)' /Richardson 1922/. Heisenberg et Von Weizsäcker, lors de leur mise en résidence surveillée à Cambridge en 1945 comme prisonniers de guerre, décidèrent de s'attaquer au problème de la turbulence développée, ceci pour deux raisons : c'était le problème difficile, voire insoluble, par excellence, et il ne nécessitait pas de consulter la littérature antérieure, eux-mêmes n'ayant pas alors accès à une bibliothèque scientifique. Ils reprennent l'idée de 'viscosité turbulente' émise par Prandtl /1925/ pour fermer la hiérarchie des équations de Navier-Stokes moyennées, dans ce cas appelées équations de Reynolds, mais en les écrivant directement dans l'espace spectral : puis, en utilisant des arguments d'analyse dimensionnelle, ils montrent que l'énergie turbulente cascade selon un spectre en loi de puissance de la forme $\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, résultat semblable à celui de Kolmogorov et Obukhov, le spectre étant la transformée de Fourier des fonctions de corrélation intégrée par couronne de nombre d'onde de mosule constant. Onsager /1945/ était arrivé aux mêmes conclusions peu de temps auparavant, et il est remarquable que ces différents travaux concernant la distribution de l'énergie de la turbulence développée, russes, allemands et américains, bien que contemporains, aient été effectués de façon semble-t-il indépendante. Le spectre en $k^{-5/3}$ ainsi prédit est bien vérifié expérimentalement, même dans des conditions allant au-delà des hypothèses de Kolmogorov. Cependant les expériences de

Batchelor et Townsend /Batchelor et Townsend, 1949/ ont mis en évidence le phénomène d'intermittence des petites échelles qui, suivant les réserves émises par Landau/Landau, 1953/ concernant la théorie de Kolmogorov, a conduit ce dernier à reconsidérer son hypothèse d'auto-similarité et celle de la constance du taux de transfert dans la zone inertielle pour leur substituer l'hypothèse d'une répartition lognormale des fluctuations du taux de dissipation variant cette fois-ci avec l'échelle, l'intermittence croissant quand les échelles deviennent de plus en plus petites.

## 4. La turbulence bidimensionnelle

Von Neumann, dans un article de revue publié en 1949 et intitulé 'Recent theories of turbulence' /Von Neumann 1949/, fait la remarque suivante, qui s'avéra par la suite fort judicieuse: 'Il n'est pas immédiatement clair à partir des arguments d'Onsager-Kolmogorov-Von Weizsäcker, pourquoi ceux-ci ne s'appliqueraient pas aussi bien en dimension deux qu'en dimension trois. Leur argument , si je le comprends bien, signifierait qu'en dimension deux les mécanismes d'échange d'énergie ne seraient pas suffisamment actifs, car inhibés par certaines lois de conservation'. En fait, près de vingt ans plus tard, Kraichnan /1967/, Leith / / et Batchelor / /, en suivant un raisonnement phénoménologique similaire à celui de Kolmogorov, montrèrent qu'en dimension deux il y a, non plus une cascade directe d'énergie, mais une cascade d'un second invariant, l'enstrophie (intégrale du carré du tourbillon), cette fois-ci selon un spectre proportionnel à $\eta^{2/3}$ $k^{-3}$ ($\eta$ étant ici le taux de transfert d'enstrophie). La conservation de l'enstrophie est due à la conservation du tourbillon, celle-ci provenant du fait qu'en dimension deux le tourbillon et le gradient de vitesse sont orthogonaux. Ainsi, bloquée par la conservation de l'enstrophie, l'énergie, au lieu d'être transférée vers les petites échelles, remonte-t-elle vers les grandes échelles, donnant lieu à une 'cascade inverse', ce que Kraichnan a interprété comme l'apparition d'une 'température négative' /Kraichnan et Montgomery /. Cette remontée de l'énergie vers les grandes échelles avait été prévue dès 1953 par Fjörtoft / / et Onsager / /. Toutefois, l'idée de 'turbulence bidimensionnelle' fut longue à s'imposer, car on pensait la turbulence directement liée à l'étirement des tubes de tourbillon par les gradients de vitesse, mécanisme qui en dimension trois assure le transfert de l'énergie vers les petites échelles, mais est inhibé en dimension deux à cause de la conservation du tourbillon. La turbulence bidimensionnelle a cependant en commun avec la turbulence tridimensionnelle la dynamique non linéaire à l'origine du caractère chaotique et 'imprédicible' de sa structure macroscopique. Elle a aujourd'hui acquis droit de cité, dans la mesure où elle permet de rendre compte de la dynamique des écoulements géophysiques à grande échelle, rendus bidimensionnels par la faible épaisseur de ces écoulements par rapport à leur étendue et par l'effet conjugué d'une stratification stable et d'une forte rotation du référentiel. On peut aussi conjecturer que dans certains écoulements tridimensionnels les régions à fort gradient s'organisent en nappes, pour lesquelles le produit du tourbillon par le gradient de vitesse s'annule, donnant ainsi dans ces régions un comportement du type turbulence bidimensionnelle.

## 5. L'apport de l'expérimentation numérique

L'étude de la turbulence a un statut particulier du point de vue épistémologique car les équations de Navier-Stokes décrivant la dynamique des fluides visqueux sont unanimement admises et seule leur intégration pose problème dès lors que les écoulements deviennent turbulents. Von Neumann dans un article non publié de 1946 (mais disponible dans ses oeuvres complètes / /), écrit en collaboration avec Golstine, précise l'originalité de l'étude de la turbulence par rapport au reste de la physique: 'Il est remarquable que l'expérimentation physique qui a conduit à ces découvertes (dans le domaine de la turbulence) est une forme bien particulière d'expérience, très différente de ce que l'on rencontre dans d'autres domaines de la physique. En fait, l'expérience en mécanique des fluides est généralement conduite dans des conditions où les principes physiques sous-jacents ne font aucun doute, où les quantités à mesurer sont entièrement déterminées par des équations connues. Le but de l'expérience n'est pas de vérifier une nouvelle théorie mais de remplacer les calculs effectués à partir d'une théorie connue par des mesures directes. Ainsi par exemple les souffleries sont-elles actuellement utilisées, au moins en grande partie, comme instrument de calcul de type disons analogique pour intégrer les équations aux dérivées partielles non linéaires gouvernant la dynamique des fluides. C'est en quelque sorte cette forme détournée de calcul qui a fourni, et fournit encore, les idées mathématiques décisives dans le domaine de la mécanique des fluides. C'est de toute évidence une méthode analogique. Il apparaît cependant clairement que les calculateurs digitaux ont plus de souplesse, de précision et peuvent être maintenant rendus plus performants. Je crois donc qu'il est temps aujourd'hui d'envisager d'effectuer la transition vers ce type de machines afin d'augmenter la puissance de cette approche dans des proportions sans précédent'. Cette remarque était prémonitoire, dans la mesure où il a fallu attendre les années 1970 pour que les premières expériences numériques concernant les écoulements turbulents soient rendues possibles en utilisant les plus puissants ordinateurs disponibles à l'époque.

6. <u>Les structures cohérentes</u>

Cependant dès 1955 Fermi et Ulam surent utiliser l'ordinateur de façon heuristique pour étudier le comportement de systèmes faiblement non linéaires, par exemple l'évolution d'une corde discrète composée de 16 à 64 masses identiques reliées par des ressorts présentant une non linéarité en loi de puissance / /. A leur surprise, ils trouvèrent que le système, au lieu de tendre vers l'équilibre thermique, c'est-à-dire l'équipartition de l'énergie entre tous les degrés de liberté du système, revenait régulièrement à un état très proche de celui initial.

Un tel comportement récurrent fut également mis en évidence en 1962 par Kruskal / / et Zabusky / / dans un système continu cette fois-ci. En visualisant les solutions dans l'espace physique, ils observèrent des ondes localisées se propageant à vitesse uniforme, mais gardant leur forme initiale, ondes solitaires qu'ils appelèrent 'solitons'. Cette découverte numérique fut capitale, d'une part car elle remit partiellement en cause l'hypothèse ergodique à la base de la mécanique statistique, et d'autre part car elle montra l'incomplétude de l'approche spectrale en théorie de la turbulence dans la mesure où les coefficients de Fourier perdent toute information sur la cohérence spatiale d'un écoulement.

La découverte du soliton redonna ainsi de l'intérêt à la visualisation des phénomènes dans l'espace physique, ce qui permit quelques années plus tard de mettre en évidence l'existence de structures cohérentes au sein des écoulements turbulents, aussi bien bidimensionnels que tridimensionnels. A propos des structures cohérentes et de leur rôle en théorie de la turbulence, Zabusky affirme que: 'Dans la dernière décennie nous venons de faire l'expérience d'un changement conceptuel dans notre point de vue sur la turbulence. Pour les écoulements ayant un fort cisaillement de vitesse... ou d'autres caractéristiques d'organisation, nombreuses sont maintenant les personnes qui pensent que la description spectrale, ou en termes de nombres d'onde, a inhibé les progrès fondamentaux. Le nouvel 'El Dorado' réside dans la compréhension mathématique des structures cohérentes au sein des fluides peu dissipatifs: la formation, l'évolution et les intéractions entre des solutions métastables de type tourbillonnaire obtenues à partir d'équations aux dérivées partielles non linéaires...' /Zabusky, 1977/.

## 7. La transition laminaire-turbulent

En ce qui concerne le problème de la transition vers la turbulence, le point de vue couramment admis était jusqu'à ces dernières années celui proposé par Landau /Landau et Lifchitz 1971/, selon lequel l'apparition du chaos devait se faire progressivement, par excitation de proche en proche dans le spectre d'un grand nombre de degrés de liberté, la turbulence pleinement développée se définissant alors comme un régime asymptotiquement atteint quand tous les degrés de liberté du système sont excités. Cette interprétation fut remise en cause en 1971 par Ruelle et Takens /22//23/, qui montrèrent qu'un régime chaotique peut apparaître dès que trois degrés de liberté au moins sont excités dans le système, suggérant au contraire une transition brutale entre le régime laminaire et le régime turbulent.

Cette idée est à l'origine de la notion d'attracteur étrange, dont le comportement avait été mis en évidence à l'aide d'expériences numériques par Lorenz dès 1963 /24/ à partir d'un système d'équations non linéaires couplées ne présentant que quelques degrés de liberté. De tels systèmes présentent un chaos déterministe, c'est-à-dire ont un comportement sensible aux conditions initiales. Ainsi Lorenz /39//40//41/ et Robinson /42/ ont-ils montré qu'une erreur initiale, aussi minime soit-elle, affectant la petite échelle d'un écoulement turbulent est amplifiée au point de modifier, au bout d'un temps fini, appelé temps de 'prédicibilité', la dynamique de l'écoulement à toutes les échelles.

D'où l'idée actuelle que la dynamique d'un écoulement turbulent n'est 'prédicible' de façon déterministe que sur un temps court, car ces écoulements sont instables vis-à-vis de perturbations des conditions initiales (les erreurs d'arrondi par exemple); cependant leur comportement sur des temps longs peut être prédit statistiquement, c'est-à-dire en considérant la moyenne d'un ensemble de réalisations de cet écoulement, car le comportement statistique du système reste par contre stable et donc 'prédictible' en moyenne.

## 8. Les questions ouvertes en 1970

Le rappel historique que nous venons de faire permet de dégager les directions qui s'offrent à la fin des années 1970 en théorie de la turbulence et les principales questions auxquelles les simulations numériques doivent tenter de répondre:

1. l'interprétation de Leray, selon laquelle la turbulence est directement liée à la non-unicité des solutions de l'équation de Navier-Stokes, c'est-à-dire à l'apparition de singularité dans les écoulements à grand nombre de Reynolds au bout d'un temps fini,
2. la loi de Kolmogorov en $k^{-5/3}$, décrivant la cascade d'énergie de la turbulence tridimensionnelle,
3. la cascade inverse d'énergie en $k^{-5/3}$ et la cascade directe d'enstrophie en $k^{-3}$ dans le cas de la turbulence bidimensionnelle,
4. le principe d'invariance à la base de l'interprétation statistique, principe selon lequel les symétries des équations de Navier-Stokes seraient retrouvées statistiquement à la petite

échelle où la turbulence deviendrait homogène, isotrope et auto-similaire (c'est-à-dire présenterait une invariance d'échelle) dans la limite des nombres de Reynolds infinis,
5. la présence de structures cohérentes au sein des écoulements turbulents est-elle universelle, quelque soit le type d'écoulement et sa dimensionnalité ?
6. l'existence de structures cohérentes permet-elle de réduire le nombre de degrés de liberté nécessaires pour décrire l'évolution d'un écoulement turbulent? Grâce à celles-ci l'écoulement devient-il ainsi plus 'prédicible'?
7. les scénarios d'apparition de la turbulence, 'à la Landau' ou 'à la Ruelle-Takens'.

## 9. Epilogue

La turbulence est restée jusqu'à présent un problème mal formalisé, sinon mal posé. On ne dispose à ce jour d'aucune théorie complète du phénomène. Celui-ci est trop complexe pour être résolu de façon satisfaisante avec les moyens actuels, aussi bien d'un point de vue expérimental, que théorique ou numérique.

Ou, plus exactement, la turbulence nous apparaît d'autant plus complexe que les moyens dont nous disposons nous semblent inadaptés:
1. la mécanique newtonienne et hamiltonienne, ainsi que la mécanique statistique, ne traitent que des états stables (ou au voisinage de l'équilibre) et ne décrivent que des phénomènes conservatifs et quasi-réversibles,
2. de plus, la mécanique classique ne sait intégrer exactement que des systèmes composés de peu d'éléments en interaction (système Terre-Soleil, noyau d'Helium...), en général des problèmes à deux corps,
3. et si on regarde du côté des mathématiques, elles n'ont pas encore les moyens de résoudre la plupart des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent les mouvements turbulents, ni même de dire si ces solutions existent et sont uniques.

Or la turbulence est bien différente:
1. instable et dissipative, donc irréversible,
2. due à de très nombreux éléments en interaction et présentant un très grand nombre de degrés de liberté,
3. gouvernée par des équations aux dérivées partielles non linéaires.

En conclusion, il nous semble y avoir inadéquation entre les moyens conceptuels et techniques actuels et les caractéristiques intrinsèques des phénomènes turbulents, ce qui explique le peu d'emprise que nous ayons sur eux. Il est à souhaiter qu'une nouvelle approche se dégage à partir des idées qui voient le jour en mathématique aujourd'hui, en particulier avec la théorie des systèmes dynamiques, la morphologie mathématique ou les techniques d'analyse multi-échelles telles les ondeletes: celles-ci devraient apporter une vision plus qualitatige, plus morphologique et plus géométrique de la turbulence.

## Références

/1/ J. Leray
Etude de diverses équations intégrales non-linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique
J. Mathématiques Pures et Appliquées, 12, 1-82 (1933)
/2/ W. Heisenberg
Uber Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen
Ann. Phys. , 74 (4), 577-627 (1924)
/3/ L. Prandtl

Zeitschrift Angewandte Mathematik Mechanik, 5, 136 (1925)
/4/ H. Gebelein
Turbulenz; physikalische Statistik und Hydrodynamik
Berlin (1935)
/5/ G. I. Taylor
Statistical theory of turbulence
Proc. Royal Soc., A151, 421-478 (1935)
/6/ T. Von Karman, L. Howard
On the statistical theory of isotropic turbulence
Proc. Royal Soc., A164, 476-490 (1938)
/7/ A. M. Kolmogorov
The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers
C.R. Acad. Sc. URSS, 31, 538-540 (1941)
/9/ A.N. Kolmogorov
Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence
C.R. Acad.Sc. URSS, 32, 16-18 (1941)
/10/ A.M. Obukhov
C.R. Ac. Sc. URSS, 32, 19 (1941)
/11/ L. Onsager
The distribution of energy in turbulence
Phys. Rev., 68, 286 (1945)
/12/ C.F.Von Weizsäcker
Das spectrum der Turbulenz bei grossen Reynoldschen Zahlen
Zeit. für Phys., 124, 628-657 (1948)
/14/ L. F. Richardson
Weather prediction by numerical process
Cambridge, 66 (1922)
/15/ J. Von Neumann
Recent theories of turbulence
Oeuvres Complètes, 6, 437-471 (1949)
/16/ R. H. Kraichnan
Inertial ranges in two-dimensional turbulence
Phys. Fluids, 10, 1417-1423 (1967)