

Formation et stabilité des structures cohérentes quasi singulières en turbulence bidimensionnelle

Marie FARGE, Matthias HOLSCHNEIDER et Thierry PHILIPOVITCH

Résumé – Nous pensons qu'en théorie de la turbulence, parallèlement à l'approche statistique qui travaille à partir de moyennes d'ensemble, il est également important de chercher à mieux comprendre les mécanismes en jeu, en particulier la formation et l'évolution des structures cohérentes, ceci en étudiant chaque réalisation de l'écoulement prise séparément. Ce n'est que dans un second temps que l'on pourra alors définir de nouveaux types de moyennes mieux adaptées pour la modélisation de la dynamique des écoulements turbulents. A partir de simulations numériques d'un écoulement turbulent bidimensionnel en déclin, nous avons montré que les structures cohérentes quasi singulières, correspondant à une distribution radiale de la vorticité en $r^{-1/2}$, non seulement sont stables lors de l'évolution de l'écoulement, mais également accr tent le bruit aléatoire de même signe présent dans leur voisinage. Ceci nous conduit à expliquer la formation des structures cohérentes quasi singulières par l'enroulement de l'écoulement autour des quasi singularités présentes dans les conditions initiales. Ces structures continuent ensuite, tout au long de l'évolution, à organiser l'écoulement dans leur voisinage.

Formation and stability of quasi-singular coherent structures in two-dimensional turbulence

Abstract – In a parallel direction to the statistical approach used in turbulence, which is based on ensemble averages, it is also important to understand better the mechanisms involved, especially the formation and evolution of coherent structures, by studying each flow realization in itself. It is only then that we will be able to define new types of averages, better suited to the modelling of turbulent dynamics. From numerical simulations of decaying two-dimensional turbulence, we have shown that quasi-singular coherent structures, corresponding to a radial vorticity distribution in $r^{-1/2}$, not only are stable, but also accrete the same-sign random noise present in their vicinity. This has led us to explain the formation of quasi-singular coherent structures by the wrapping of the flow around the quasi-singularities present in the initial conditions. These structures then continue to organize the flow in their vicinity throughout the flow evolution.

Abridged English Version – The present statistical theory of turbulence is based on ensemble averages, or equivalently (when assuming ergodicity of the flow) on space averages, and considers averaged quantities such as structure functions and energy spectra. Supposing the flow to be statistically homogeneous and isotropic, the theory predicts that the energy follows a power-law distribution in $k^{-5/3}$ for three-dimensional flows and in k^{-3} for two-dimensional flows, k being the wavenumber averaged over angles, with some correction coefficient to take into account intermittency ([3], [4], [5]). In laboratory ([9], [10]) and numerical experiments ([6], [7], [8]) of two-dimensional turbulence we observe the emergence and persistence of coherent structures which are convected by the flow while preserving their shape, and we think they play an essential dynamical role. However, in performing the averages used by the classical theory of turbulence we unfortunately lose the information related to the coherent structures present in the flow, in particular their location.

We should also be very cautious concerning the interpretation of the energy spectra obtained from the numerical experiments of turbulent flows. We think that the statistical interpretation is not relevant for those experiments because in this case the spectra are obtained from only one realization of the flow computed in a periodic domain. Consequently we cannot then use the Wiener-Kintchin theorem, which is only valid if we consider either ensemble averages or a flow computed in an infinite domain (in this case

Note présentée par René MOREAU.

only, a space average will be equivalent to an ensemble average if we assume ergodicity of the flow). We have therefore proposed [12], instead of the classical statistical interpretation, a geometrical interpretation which relates the power-law behaviour of the energy spectra to the shape of the most singular coherent structures present in the flow: the presence of some cusp-like coherent structures whose vorticity scales as r^α , r distance to their centre and α in \mathbb{R}^n , gives an energy distribution $E(k) \sim k^{-2\alpha-5}$. We have conjectured that such cusp-like coherent structures are formed by the accretion of the vorticity fields around the quasi-singular (namely singular up to the cut-off scale associated to the mesh size) points present in the initial conditions.

In this paper we test the stability of some coherent structures which scale as $r^{-1/2}$ and give an energy spectrum in k^{-4} , which is the distribution commonly observed in numerical experiments of two-dimensional turbulence ([6], [7], [8]). For this, we use the incompressible Navier-Stokes code of Basdevant [6] and initialize it with a $r^{-1/2}$ quasi-singular vortex perturbed by a white noise whose maximal amplitude corresponds to 30% of the vorticity at the centre of the vortex. After integrating this code for 2250 time steps, which correspond to 130 eddy turnover times of the vortex, we observe that the cusp-like coherent structure remains stable and preserves its shape. We also see that the positive part of the noise is accreted onto the vortex, which shows that the coherent structure organizes the noise in its vicinity; during this accretion process there is a concomitant enstrophy cascade leading to the dissipation of the noise, which is reduced to represent only 1% of the vorticity at the centre of the vortex at the end of the computation. Dissipation is also effective on the vortex, whose amplitude at the centre is reduced by 23% during the flow evolution. In conclusion we have shown that such quasi-singular distributions of vorticity in $r^{-1/2}$, perturbed by a strong white noise, remain stable under the Navier-Stokes dynamics and organize the flow in their vicinity, while retaining their quasi-singular shape up to a very small scale where dissipation smooths their core.

1. INTRODUCTION. — La théorie statistique actuelle de la turbulence, de par son raisonnement en termes de fonctions de structure moyennées dans l'espace ou en termes de modes de Fourier, élude toute information sur la structure locale de l'écoulement, et en particulier sur la présence des structures cohérentes. De plus elle repose sur l'hypothèse d'une homogénéité au sens statistique (invariance par translation des moyennes d'ensemble) de l'écoulement dans la gamme d'échelles correspondant à la zone inertielle, c'est-à-dire celles petites devant l'échelle intégrale à laquelle l'écoulement est excité et grandes par rapport à l'échelle dissipative où il est amorti. Ainsi en dimension trois la théorie statistique prédit-elle que le spectre d'énergie est distribué selon une loi de puissance en $k^{-5/3}$, k étant le nombre d'onde moyenné sur les directions, et en dimension deux selon une loi de puissance en k^{-3} .

Certes, les théories statistiques plus récentes proposent des corrections à ces lois pour tenir compte du phénomène d'intermittence que l'on observe expérimentalement ([1], [2]). L'intermittence se caractérise par le fait que le support spatial des régions excitées de l'écoulement semble décroître avec l'échelle. Ainsi dans la limite des nombres de Reynolds très grands les plus petites échelles actives de l'écoulement se concentreraient-elles sur un sous-ensemble, supposé fractal ([3], [4], [5]). Cependant les théories actuelles de l'intermittence reposent sur la même hypothèse d'homogénéité au sens statistique et raisonnent également à partir de fonctions de structure moyennées ou de modes de Fourier, ce qui

les empêche de faire le lien explicite avec les structures cohérentes que l'on observe dans l'espace physique pour une réalisation donnée et que l'on ne peut plus mettre en évidence quand on effectue des moyennes d'ensembles. L'approche que nous proposons est de raisonner, non plus au sens statistique, mais à partir d'une seule réalisation de l'écoulement que l'on étudie de façon géométrique, à la fois dans l'espace physique et dans l'espace spectral. La seule hypothèse que nous ferons est celle d'une inhomogénéité de l'écoulement due à la présence d'au moins une structure cohérente similaire à celles observées dans les simulations numériques ([6], [7], [8]) et en laboratoire ([9], [10]).

Les structures cohérentes sont des condensations du champ de vortacité (rotationnel de la vitesse) qui confinent en leur sein une grande partie de l'énergie et de l'énstrophie (intégrale du carré de la vortacité) de l'écoulement turbulent. Si on sait trouver analytiquement quelques structures cohérentes stationnaires solutions des équations d'Euler, en particulier toute distribution axisymétrique du champ de vortacité pour laquelle le terme non linéaire est alors nul, on n'a aucune théorie quant à leur formation, leur stabilité et leur évolution temporelle. C'est ici que l'expérience numérique est appelée à jouer un rôle important, et c'est le problème que nous adressons dans cette Note. Nous nous proposons d'étudier la formation de certaines structures cohérentes observées dans les expériences numériques et de tester leur stabilité. Bien que cette approche soit tout aussi valide dans son principe en dimension trois, nous nous placerons ici dans le cas d'un écoulement turbulent bidimensionnel en déclin.

2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU SPECTRE TURBULENT. — Nous partirons de deux faits observés dans les expériences numériques de turbulence bidimensionnelle. Le premier est que l'on obtient, après une intégration suffisante des équations de Navier-Stokes, un état de régime où la pente spectrale ne varie plus et s'établit selon un spectre en loi de puissance, ceci jusqu'aux échelles dissipatives. Le second fait est que l'on observe, quand cet état de régime est établi, la présence de structures cohérentes, soit axisymétriques quand elles sont isolées, soit elliptiques ou déformées en spirales quand elles interagissent fortement avec une ou plusieurs autres structures voisines.

Dans les expériences numériques l'interprétation que l'on donne aux spectres observés est sujette à caution car elle s'appuie sur la théorie statistique qui raisonne à partir de moyennes d'ensemble. Or, en pratique, on ne peut pas se payer le luxe d'effectuer un grand nombre d'expériences numériques que l'on moyennerait ensuite, aussi ne mesure-t-on le spectre qu'à un instant donné d'une seule réalisation. On suppose alors, autre hypothèse à la base de l'approche statistique, que la turbulence provient d'un processus aléatoire et que celui-ci est stationnaire et ergodique. On sait par le théorème de Wiener-Khinchin que la transformée de Fourier d'une réalisation d'un processus aléatoire stationnaire dans \mathbb{R}^n est la même que la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de ce même processus. C'est ce théorème que l'on applique implicitement pour relier les spectres observés pour une réalisation de l'écoulement turbulent au spectre prédit par la théorie statistique pour les moyennes d'ensemble. Or il n'est valide que dans \mathbb{R}^n et ne peut donc pas s'appliquer aux domaines finis, tel le tore T^2 qui sert de cadre aux expériences numériques citées précédemment ([6], [7], [8]). C'est cette raison qui nous a conduit à réfuter l'interprétation statistique donnée aux spectres observés dans les expériences numériques et à proposer à la place une interprétation géométrique [12]. Pour fonder notre interprétation nous ne faisons que l'hypothèse suivante : les solutions des équations de Navier-Stokes correspondent pour toutes les échelles

supérieures aux échelles dissipatives, où la viscosité ν régularise localement ces solutions, aux solutions des équations d'Euler, c'est-à-dire à la limite singulière $\nu=0$.

Nous partons donc de l'observation d'un spectre en loi de puissance dans les expériences numériques de turbulence bidimensionnelle et nous supposons que, dans la limite où le nombre de Reynolds tend vers l'infini, c'est-à-dire pour ν tendant vers 0, on a toujours un spectre en loi de puissance. Ceci implique que ni la vorticité ni la vitesse ne peuvent être différentiables à tous les ordres, car on sait [11] que si une fonction f sur le tore en dimension 2, \mathbb{T}^2 , a une transformée de Fourier présentant un spectre en loi de puissance $k^{-\alpha}$, alors la fonction est de régularité au plus Lipschitz α , étant donné que

$$f \in \Lambda^\alpha(\mathbb{T}^2) \Rightarrow |\hat{f}| \leq C |k|^{-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

Nous rappelons que Lipschitz α signifie :

1. pour $0 < \alpha \leq 1$, que

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha,$$

C étant une constante et $x \rightarrow y$,

2. pour $\alpha > 1$ et $n < \alpha < n + 1$, que la n -ième dérivée de f est de régularité $\alpha - n$.

Nous soulignons une fois encore que le spectre d'énergie, mesuré pour les expériences numériques que nous cherchons à interpréter, ne correspond pas au spectre du processus aléatoire mais à celui d'une seule réalisation. Pour cette raison nous avons proposé dans un article précédent [12] le modèle de tourbillon quasi singulier suivant

$$\omega(r) = \rho * (r^\alpha \varphi(r)), \quad E(k) = \hat{\varphi} * (\hat{\rho}(k) k^{-2\alpha-5}), \quad \alpha \in \mathbb{R}^n,$$

r étant la distance au centre du tourbillon et k étant le nombre d'onde. La fonction φ est à décroissance rapide à l'infini et régulière autour de l'origine; ρ est un filtre de lissage très local qui, par convolution ($*$), régularise le cœur du tourbillon. En partant de cette relation et en nous appuyant sur le fait que les pentes spectrales couramment observées en turbulence bidimensionnelle sont en $-2\alpha - 5 = -4$, nous en avons déduit qu'il devrait y avoir dans l'écoulement des structures cohérentes présentant une distribution singuliere de vorticité en $r^{-1/2}$, ce qui correspond au cas $\alpha = -1/2$, ceci jusqu'aux échelles dissipatives où la dissipation régularise le cœur des singularités, d'où le nom de quasi-singularité que nous leur avons donné. La présence de quasi-singularités d'exposant $-0,4 < \alpha < -0,6$ vient d'être confirmée par Benzi et Vergassola dans le cas d'un écoulement bidimensionnel en déclin [13].

EXPLICATIONS DES PLANCHES

Planche I

Fig. 1. — Structure cohérente quasi singuliere correspondant à une distribution de vorticité en $r^{-1/2}$.

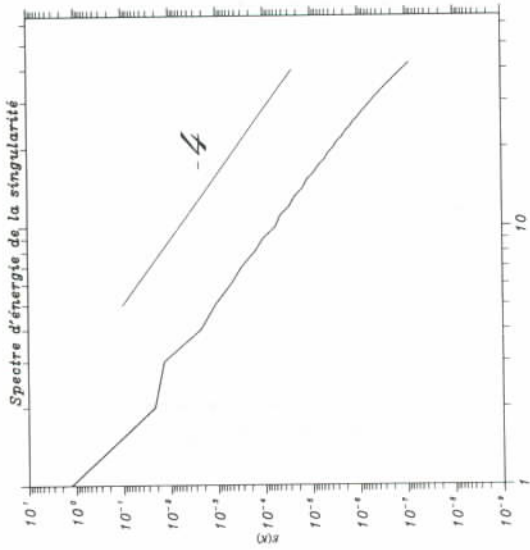
Fig. 1. — *Quasi singular coherent structure corresponding to a $r^{-1/2}$ vorticity distribution.*

Fig. 2. — Champ de vorticité à $t=0$: structure cohérente quasi singuliere perturbée par 30 % de bruit.

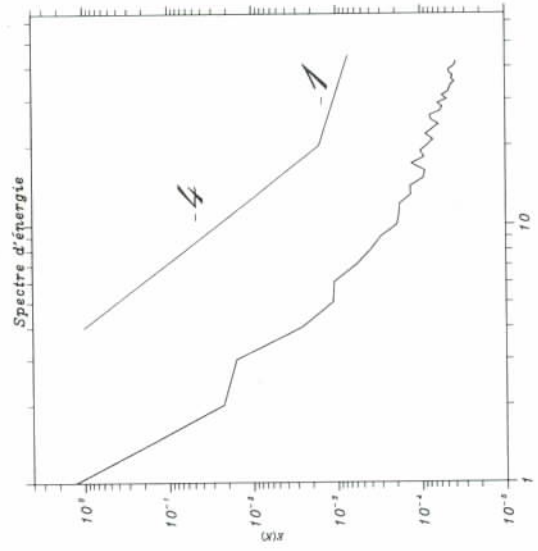
Fig. 2. — *Vorticity field at $t=0$: quasi singular coherent structure perturbed by a white noise.*

Fig. 1 et 2. — (a) Champ dans l'espace physique (représentation cavalière); (b) Coupe du champ; (c) Spectre d'énergie intégré par couronnes $|k| = \text{constant}$.

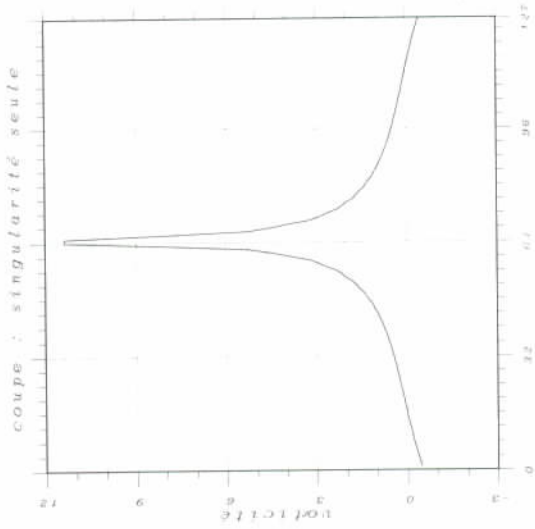
Figs. 1 and 2. — (a) *Field in physical space (perspective representation); (b) Section of the field; (c) Energy spectrum averaged over shells $|k| = \text{constant}$.*



(c)

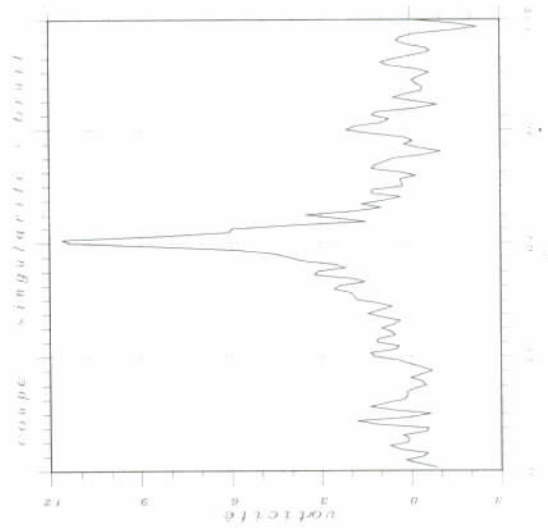


(c)



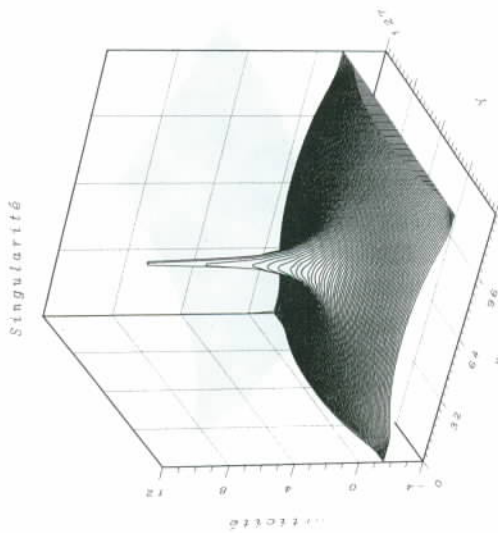
(b)

Fig. 1

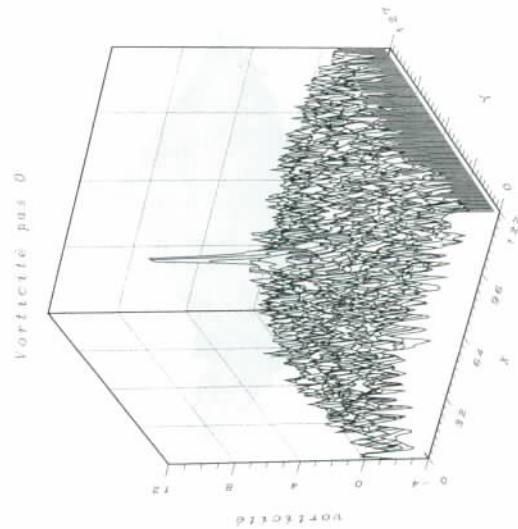


(b)

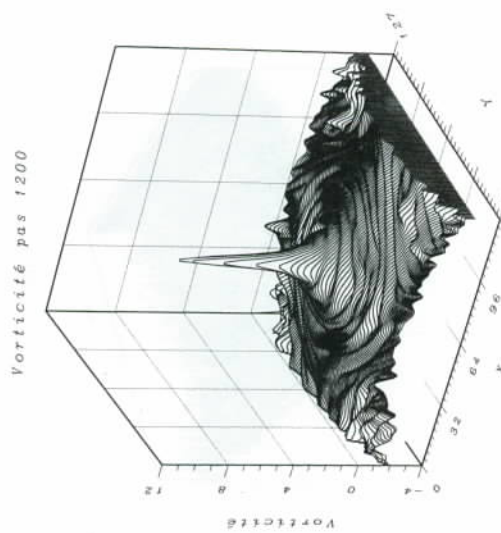
Fig. 2



(a)



(a)



(a)

(a)

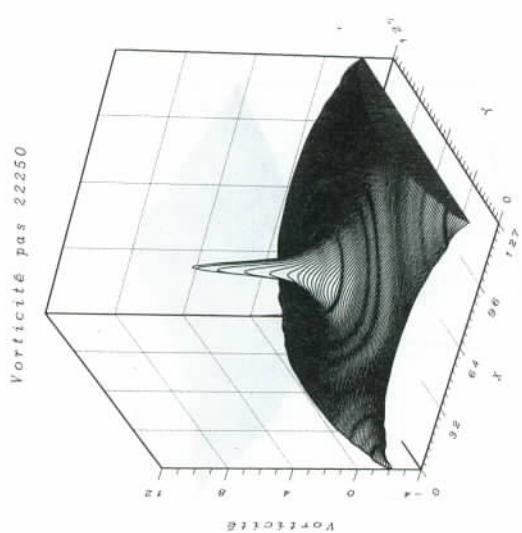
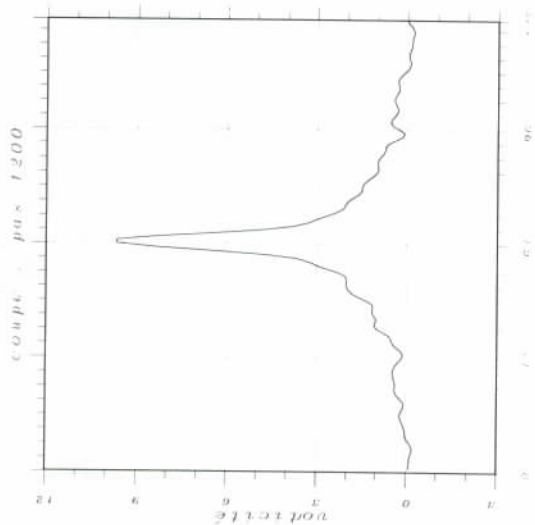
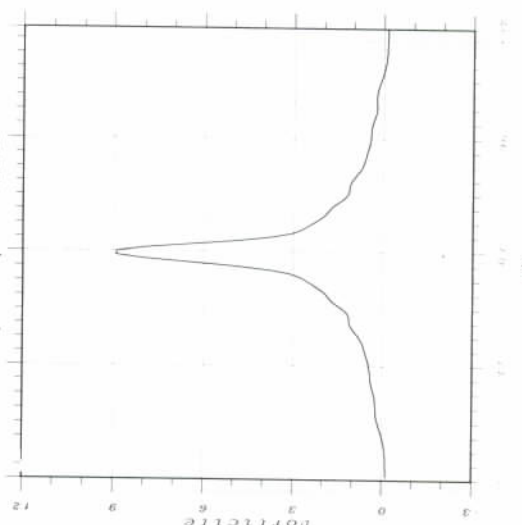


Fig. 3

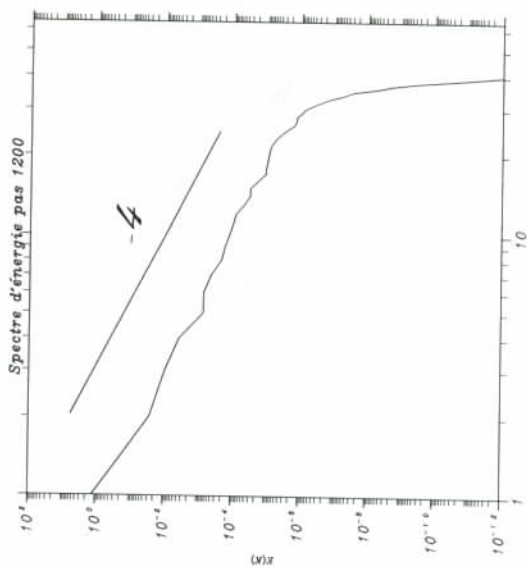
Fig. 4



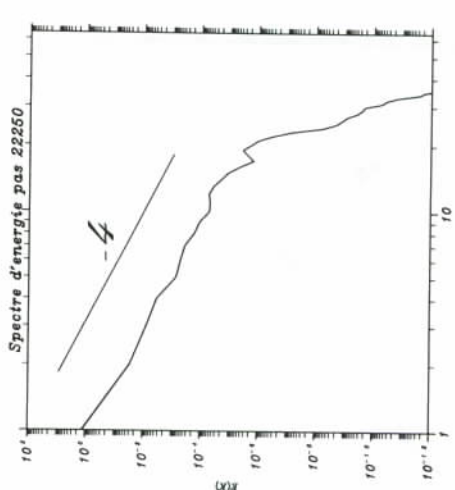
(h)



(h)



(c)



(c)

Planche II

Fig. 3. — Champ de vorticité à $t=13$ (en unités de temps de retournement de la quasi-singularité).

Fig. 3. — Vorticity field at $t=13$ (time units based on the eddy turnover time of the quasi-singularity).

Fig. 4. — Champ de vorticité à $t=130$ (en unités de temps de retournement de la quasi-singularité).

Fig. 4. — Vorticity field at $t=130$ (time units based on the eddy turnover time of the quasi-singularity).

Fig. 3 et 4. — (a) Champ dans l'espace physique (représentation cavalière); (b) Coupe du champ; (c) Spectre d'énergie intégré par couronnes $|k|=\text{constant}$.

Figs. 3 and 4. — (a) Field in physical space (perspective representation); (b) Section of the field; (c) Energy spectrum averaged over shells $|k|=\text{constant}$.

3. STABILITÉ DES STRUCTURES COHÉRENTES QUASI SINGULIÈRES EN $r^{-1/2}$. — Si l'on veut justifier plus avant la présence de quasi-singularités dans les écoulements turbulents bidimensionnels, il est crucial de vérifier qu'elles sont stables, au moins qu'elles survivent à la dynamique des équations de Navier-Stokes sur des temps suffisamment longs. Pour cela nous avons intégré numériquement les équations de Navier-Stokes en dimension deux à l'aide du code incompressible de Basdevant [6], en partant d'une distribution initiale de vorticité présentant une quasi-singularité $r^{-1/2}$ centrée en $x=0, y=0$ (fig. 1), à laquelle nous avons superposé un bruit blanc ayant une amplitude maximale correspondant à 30 % de la valeur de la vorticité au centre de la quasi-singularité (fig. 2). En intégrant sur 2250 pas de temps, ce qui correspond à 230 temps de retournement de la quasi-singularité, nous avons observé qu'elle se maintenait sans être déformée (fig. 3 et 4).

De plus on observe que la partie positive du bruit initial superposé à la quasi singularité se condense sur celle-ci : le bruit s'organise en formant des filaments de vorticité (fig. 3 a) qui s'enroulent autour d'elle et s'accroissent à sa périphérie sans affecter la distribution de vorticité au voisinage du coeur qui reste en $r^{-1/2}$ (fig. 3 b et 4 b). Seule l'amplitude de la quasi-singularité a été réduite sous l'effet de la dissipation, diminuant de 23 % au cours de l'évolution (fig. 4 b). Le mécanisme d'étirement des filaments de vorticité lors de l'enroulement conduit à une cascade d'énstrophie vers les petites échelles et finalement à une dissipation d'énstrophie concomitante à l'accrétion des filaments sur la quasi-singularité. Ainsi au cours de l'évolution le spectre d'énergie, initialement en k^{-1} dans les petites échelles (fig. 2 c), ce qui correspond au bruit blanc superposé au champ de vorticité, évolue-t-il vers k^{-4} (fig. 3 c et 4 c), ce qui correspond à la quasi-singularité $r^{-1/2}$ seule; de plus l'amplitude du bruit passe de 30 % initialement (fig. 2 b), à 5 % (fig. 3 b), puis à 1 % (fig. 4 b) de l'amplitude au centre de la quasi-singularité.

Les singularités présentes dans les conditions initiales serviraient donc de germes autour desquels l'écoulement s'organiserait en structures cohérentes [12]. La présence de quasi-singularités dans les conditions initiales est attestée par le fait que les expériences numériques aboutissant à des pentes en k^{-4} ([6], [7], [8]) prennent toutes pour distribution initiale un champ de vorticité aléatoire ayant un spectre d'énergie en loi de puissance jusqu'à l'échelle de coupure du maillage, ce qui correspond bien à des distributions de vorticité singulières, ceci jusqu'à cette même échelle. Le champ discrétisé est ainsi une version régularisée à l'échelle du maillage du champ singulier : c'est la meilleure approximation d'une singularité que l'on puisse faire avec un ordinateur. D'un point de vue physique maintenant, il est tout à fait raisonnable d'initialiser un écoulement turbulent bidimensionnel simulant la dynamique atmosphérique avec des structures quasi singulières qui proviennent d'instabilités tridimensionnelles dont le modèle bidimensionnel ne rend

pas compte (formation de cyclones méso échelle par exemple). Par un processus similaire à celui décrit au paragraphe précédent, l'écoulement initialement aléatoire s'organiserait progressivement en s'accrétant autour des quasi-singularités présentes dans les conditions initiales. Nous proposons ceci comme mécanisme pouvant expliquer la formation des structures cohérentes dans les écoulements turbulents bidimensionnels.

Note remise le 21 août 1991, acceptée après révision le 15 octobre 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] G. K. BATCHELOR et A. A. TOWNSEND, *Proc. Roy. Soc.*, A 199, 1949, p. 238.
- [2] F. ANSELMET, Y. GAGNE, E. HOPFINGER et R. A. ANTONIA, *J. Fluid Mech.*, 140, 1984, p. 63.
- [3] B. MANDELBROT, *J. Fluid Mech.*, 62, 1975, p. 331.
- [4] U. FRISCH, P. L. SULEM et M. NELKIN, *J. Fluid Mech.*, 87, 1978, p. 719.
- [5] G. PARISI et U. FRISCH, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, M. GHIL, R. BENZI et G. PARISI éd., North-Holland, 1985, p. 71.
- [6] C. BASDEVANT, B. LEGRAS, R. SADOURNY et M. BÉLAND, *J. Atmos. Sci.*, 38, 1981, p. 2305.
- [7] J. C. MCWILLIAMS, *J. Fluid Mech.*, 146, 1984, p. 21.
- [8] M. FARGE et R. SADOURNY, *J. Fluid Mech.*, 206, 1989, p. 433.
- [9] Y. COUDER et C. BASDEVANT, *J. Fluid Mech.*, 173, 1986, p. 225.
- [10] J. M. NGUYEN DUC et J. SOMMERIA, *J. Fluid Mech.*, 92, 1988, p. 175.
- [11] A. ZYGMUND, *Trigonometrics Series*, Cambridge University Press, 1990.
- [12] M. FARGE et M. HOLSCHNEIDER, *Europhys. Lett.*, 15, 1991, p. 737.
- [13] R. BENZI et M. VERGASSOLA, *Fluid Dyn. Res.*, 8, 1991, p. 117.

M. F. : L.M.D.-C.N.R.S., École normale supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 5;

M. H. Centre de Physique théorique, C.N.R.S., Luminy,
Case n° 907, 13288 Marseille Cedex;

T. P. : L.M.D.-C.N.R.S., École normale supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 5.